第8章 函数与集合的基数

- 函数的定义与性质
- 函数的复合与反函数
- 集合等势与优势
- 集合的基数

8.1 函数的定义与性质

- 函数的定义
  - 函数定义
  - 从A到B的函数
  - 函数的像
- 函数的性质
  - 函数的单射、满射、双射性
  - 构造双射函数

函数定义

定义 设 F 为二元关系, 若 $\forall x \in \mathrm{dom}F$ 都存在唯一的 $y \in \mathrm{ran}F$ 使 xFy 成立, 则称 F 为函数. 对于函数F, 如果有 xFy, 则记作 $y=F(x)$, 并称 y 为 F 在 x 的值.

例1 $F_1=\{\langle x_1,y_1\rangle,\langle x_2,y_2\rangle,\langle x_3,y_2\rangle\}$

$F_2=\{\langle x_1,y_1\rangle,\langle x_1,y_2\rangle\}$

F_1是函数, F_2不是函数

函数相等

定义 设F, G为函数, 则

$$F=G \Leftrightarrow F\subseteq G \wedge G\subseteq F$$

如果两个函数 F 和 G 相等, 一定满足下面两个条件:

(1) $\text{dom}F=\text{dom}G$

(2) $\forall x\in \text{dom}F=\text{dom}G$ 都有 $F(x)=G(x)$

实例 函数

$$F(x)=(x^2-1)/(x+1), \quad G(x)=x-1$$

不相等, 因为 $\text{dom}F\subset\text{dom}G$.

从A到B的函数

定义　设A, B为集合, 如果

f 为函数

$\text{dom}f = A$

$\text{ran}f \subseteq B$,

则称 f 为从A到B的函数, 记作 f: $A \to B$.

实例

f: $\mathbf{N} \to \mathbf{N}$, $f(x)=2x$ 是从 N 到 N 的函数

g: $\mathbf{N} \to \mathbf{N}$, $g(x)=2$也是从 N 到 N 的函数

B上A

定义　所有从A到B的函数的集合记作B^A, 读作 "B上A"

符号化表示为

$$B^A = \{ f \mid f: A \to B \}$$

计数:

$|A|=m$, $|B|=n$, 且$m, n>0$, $|B^A|=n^m$.

$A=\varnothing$, 则 $B^A=B^{\varnothing}=\{\varnothing\}$.

$A\neq\varnothing$且$B=\varnothing$, 则 $B^A=\varnothing^A=\varnothing$.

实例

例2 设$A = \{1,2,3\}$, $B = \{a,b\}$, 求B^A.

解 $B^A = \{f_0, f_1, \ldots, f_7\}$, 其中

$f_0=\{\langle 1,a\rangle,\langle 2,a\rangle,\langle 3,a\rangle\}$

$f_1=\{\langle 1,a\rangle,\langle 2,a\rangle,\langle 3,b\rangle\}$

$f_2=\{\langle 1,a\rangle,\langle 2,b\rangle,\langle 3,a\rangle\}$

$f_3=\{\langle 1,a\rangle,\langle 2,b\rangle,\langle 3,b\rangle\}$

$f_4=\{\langle 1,b\rangle,\langle 2,a\rangle,\langle 3,a\rangle\}$

$f_5=\{\langle 1,b\rangle,\langle 2,a\rangle,\langle 3,b\rangle\}$

$f_6=\{\langle 1,b\rangle,\langle 2,b\rangle,\langle 3,a\rangle\}$

$f_7=\{\langle 1,b\rangle,\langle 2,b\rangle,\langle 3,b\rangle\}$

函数的像

定义　设函数 f：$A \to B$, $A_1 \subseteq A$.

A_1 在 f 下的像：　$f(A_1) = \{ f(x) \mid x \in A_1 \}$

函数的像 $f(A)$

注意：　函数值 $f(x) \in B$, 而像 $f(A_1) \subseteq B$.

例3　设 f：$\mathbf{N} \to \mathbf{N}$, 且

$$f(x) = \begin{cases} x/2 & \text{若}x\text{为偶数} \\ x+1 & \text{若}x\text{为奇数} \end{cases}$$

令 $A=\{0,1\}$, $B=\{2\}$, 那么有

$f(A) = f(\{0,1\}) = \{ f(0), f(1) \}=\{ 0, 2 \}$

$f(B) = \{ f(2) \} = \{ 1 \}$

函数的性质

定义 设 f: $A \to B$,

（1）若 $\mathrm{ran}f = B$, 则称 f: $A \to B$ 是满射的.

（2）若 $\forall y \in \mathrm{ran}f$ 都存在唯一的 $x \in A$ 使得 $f(x)=y$, 则称 f: $A \to B$ 是单射的.

（3）若 f: $A \to B$ 既是满射又是单射的, 则称 f: $A \to B$ 是双射的

f 满射意味着：$\forall y \in B$, 都存在 $x \in A$ 使得 $f(x)=y$.

f 单射意味着：$f(x_1)=f(x_2) \Rightarrow x_1=x_2$

实例

例4

判断下面函数是否为单射, 满射, 双射的, 为什么?

（1）f: $\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=-x^2+2x-1$

（2）f: $\mathbf{Z}^+\to\mathbf{R}$, $f(x)=\ln x$, $\mathbf{Z}^+$为正整数集

（3）f: $\mathbf{R}\to\mathbf{Z}$, $f(x)=\lfloor x\rfloor$

（4）f: $\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=2x+1$

（5）f: $\mathbf{R}^+\to\mathbf{R}^+$, $f(x)=(x^2+1)/x$, 其中$\mathbf{R}^+$为正实数集.

实例（续）

解（1）f：R→R, $f(x)=-x^2+2x-1$

在x=1取得极大值0. 既不是单射也不是满射的.

（2）f：Z^+→R, $f(x)=\ln x$

是单调上升的, 是单射的. 但不满射, ran$f$={ln1, ln2, …}.

（3）f：R→Z, $f(x)=\lfloor x\rfloor$

是满射的, 但不是单射的, 例如 $f(1.5)=f(1.2)=1$.

（4）f：R→R, $f(x)=2x+1$

是满射、单射、双射的, 因为它是单调函数并且ran$f$=R.

（5）f：R^+→R^+, $f(x)=(x^2+1)/x$

有极小值 $f(1)=2$. 该函数既不是单射的也不是满射的.

构造从*A*到*B*的双射函数

有穷集之间的构造

例5 $A=P(\{1,2,3\})$, $B=\{0,1\}^{\{1,2,3\}}$

解 $A=\{\varnothing,\{1\},\{2\},\{3\},\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\},\{1,2,3\}\}$.

$B=\{ f_0, f_1, \ldots , f_7 \}$, 其中

$f_0=\{<1,0>,<2,0>,<3,0>\}$, $f_1=\{<1,0>,<2,0>,<3,1>\}$,

$f_2=\{<1,0>,<2,1>,<3,0>\}$, $f_3=\{<1,0>,<2,1>,<3,1>\}$,

$f_4=\{<1,1>,<2,0>,<3,0>\}$, $f_5=\{<1,1>,<2,0>,<3,1>\}$,

$f_6=\{<1,1>,<2,1>,<3,0>\}$, $f_7=\{<1,1>,<2,1>,<3,1>\}$.

令 f: $A\rightarrow B$,

$f(\varnothing)=f_0$, $f(\{1\})=f_1$, $f(\{2\})=f_2$, $f(\{3\})=f_3$,

$f(\{1,2\})=f_4$, $f(\{1,3\})=f_5$, $f(\{2,3\})=f_6$, $f(\{1,2,3\})=f_7$

构造从*A*到*B*的双射函数（续）

实数区间之间构造双射

构造方法：直线方程

例6 $A=[0,1]$

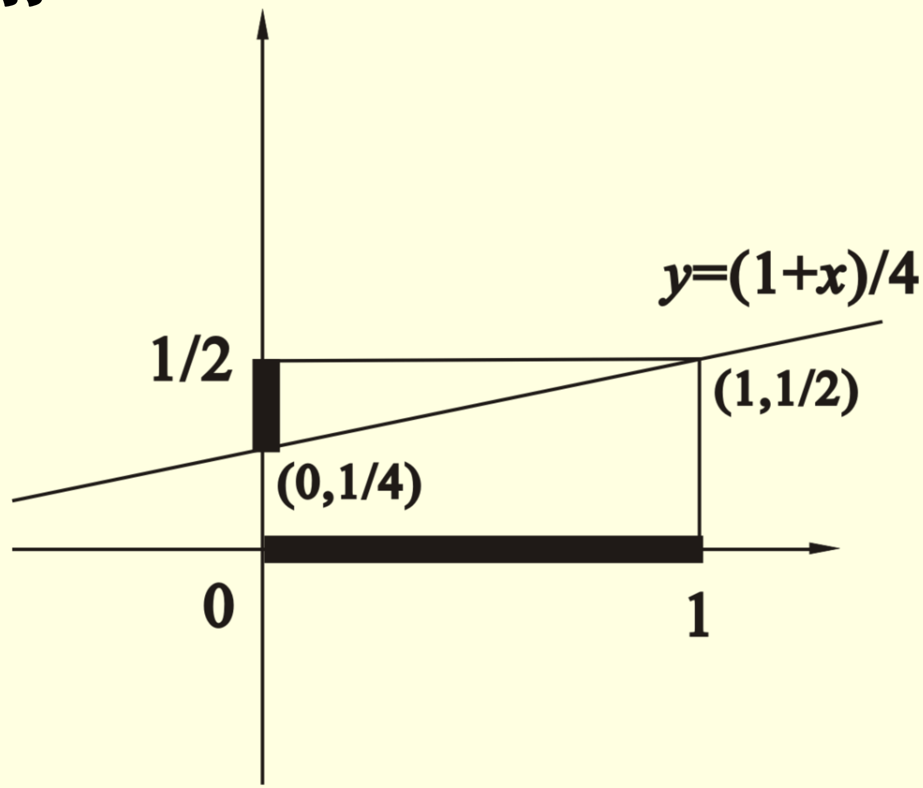
$B=[1/4,1/2]$

构造双射 $f: A\to B$

解

令 f: $[0,1]\to[1/4,1/2]$

$f(x)=(x+1)/4$



构造从A到B的双射函数（续）

A与自然数集合之间构造双射

方法：将A中元素排成有序图形，然后从第一个元素开始按照次序与自然数对应

例7　A=Z, B=N，构造双射 f：$A\to B$

将Z中元素以下列顺序排列并与N中元素对应：

$$
\begin{array}{lccccccc}
\text{Z:} & 0 & -1 & 1 & -2 & 2 & -3 & 3\ldots \\
 & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
\text{N:} & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6\ldots
\end{array}
$$

则这种对应所表示的函数是：

$$f\text{: } Z\to N,\ f(x)=\begin{cases} 2x & \geq 0 \\ -2x-1 & x<0 \end{cases}$$

计数

- 例2: 设$A_1=\{a,b\}$, $B_1=\{1,2,3\}$,
  $A_2=\{a,b,c\}$, $B_2=\{1,2\}$,
  $A_3=\{a,b,c\}$, $B_3=\{1,2,3\}$,
  求$A_1\to B_1, A_2\to B_2, A_3\to B_3$中的单射,满射,双射.

例2(解(1))

- 例2: (1) $A_1=\{a,b\}$, $B_1=\{1,2,3\}$,
- 解: (1) $A_1 \to B_1$中无满射,无双射,单射6个:

$f_1=\{<a,1>,<b,2>\}$,
$f_2=\{<a,1>,<b,3>\}$,
$f_3=\{<a,2>,<b,1>\}$,
$f_4=\{<a,2>,<b,3>\}$,
$f_5=\{<a,3>,<b,1>\}$,
$f_6=\{<a,3>,<b,2>\}$.

例2(解(2))

- 例2: (2) $A_2=\{a,b,c\}$, $B_2=\{1,2\}$,
- 解: (2) $A_2 \to B_2$中无单射,无双射,满射6个:

$f_1=\{<a,1>,<b,1>,<c,2>\}$,

$f_2=\{<a,1>,<b,2>,<c,1>\}$,

$f_3=\{<a,2>,<b,1>,<c,1>\}$,

$f_4=\{<a,1>,<b,2>,<c,2>\}$,

$f_5=\{<a,2>,<b,1>,<c,2>\}$,

$f_6=\{<a,2>,<b,2>,<c,1>\}$.

例2(解(3))

- 例2: (3) $A_3=\{a,b,c\}$, $B_3=\{1,2,3\}$,
- 解: (3) $A_2 \rightarrow B_2$中双射6个:

$f_1=\{\langle a,1\rangle,\langle b,2\rangle,\langle c,3\rangle\}$,

$f_2=\{\langle a,1\rangle,\langle b,3\rangle,\langle c,2\rangle\}$,

$f_3=\{\langle a,2\rangle,\langle b,1\rangle,\langle c,3\rangle\}$,

$f_4=\{\langle a,2\rangle,\langle b,3\rangle,\langle c,1\rangle\}$,

$f_5=\{\langle a,3\rangle,\langle b,1\rangle,\langle c,2\rangle\}$,

$f_6=\{\langle a,3\rangle,\langle b,2\rangle,\langle c,1\rangle\}$. #

单射、满射和双射的数目

- 设$|A|=n$, $|B|=m$, 问$A\to B$中有多少单射,满射,双射?
- $n<m$时, $A\to B$中无满射,双射, 单射个数为

$$m(m-1)\dots(m-n+1)$$

- $n=m$时, $A\to B$中双射个数为 $n!$
- $n>m$时, $A\to B$中无单射,双射, 满射个数为

$$m!\left\{ {n \atop m} \right\}.$$

重要函数的定义

1. 设f：$A \to B$, 如果存在 $c \in B$ 使得对所有的 $x \in A$ 都有 $f(x)=c$, 则称 f：$A \to B$是常函数.
2. 称 A 上的恒等关系 I_A为 A 上的恒等函数, 对所有的 $x \in A$ 都有 $I_A(x)=x$.
3. 设$<A, \preccurlyeq>$, $<B, \preccurlyeq>$为偏序集，f：$A \to B$，如果对任意的 $x_1, x_2 \in A$, $x_1 \prec x_2$, 就有 $f(x_1) \preccurlyeq f(x_2)$, 则称 f 为单调递增的；如果对任意的 $x_1, x_2 \in A$, $x_1 \prec x_2$, 就有 $f(x_1) \prec f(x_2)$, 则称 f 为严格单调递增的.

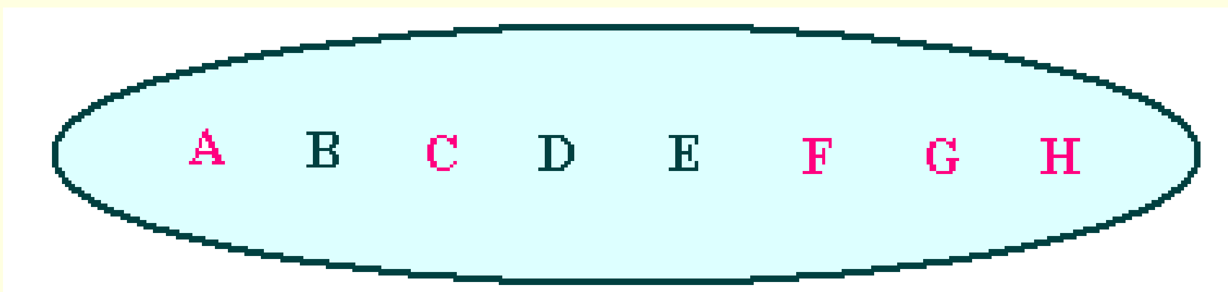
类似的也可以定义单调递减和严格单调递减的函数.

重要函数的定义（续）

4. 设 A 为集合, 对于任意的 $A'\subseteq A$, A' 的特征函数

$\chi_{A'}$: $A\to\{0,1\}$ 定义为

$$\chi_{A'}(a)=\begin{cases}1, & a\in A'\\ 0, & a\in A-A'\end{cases}$$



$T=\{$ A, C, F, G, H $\}$

x	A	B	C	D	E	F	G	H
$\chi_T(x)$	1	0	1	0	0	1	1	1

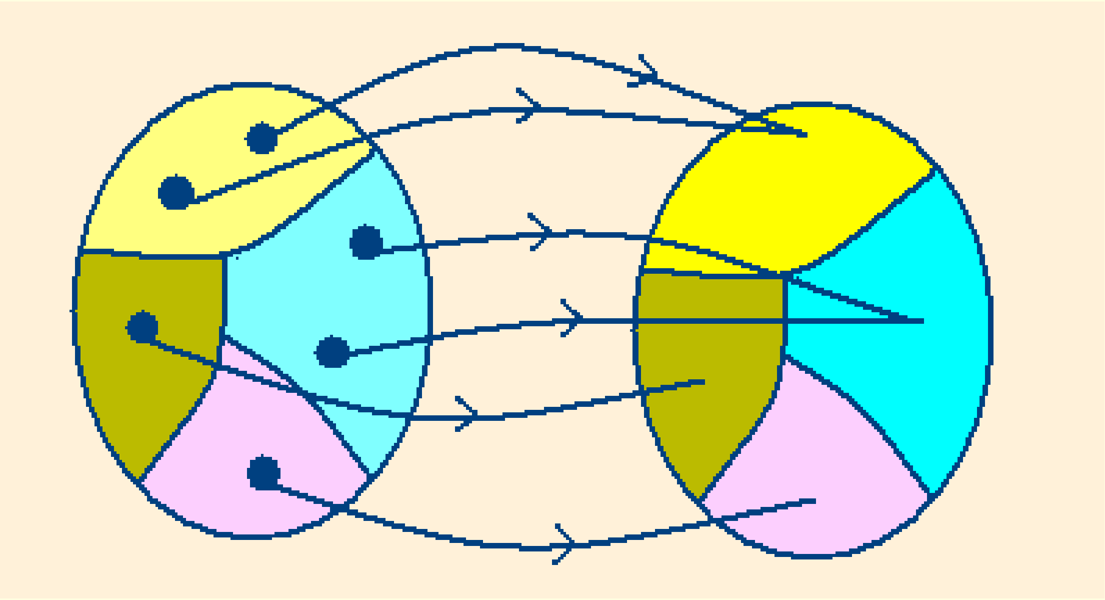
重要函数的定义（续）

5. 设 R 是 A 上的等价关系, 令

$$g: A \to A/R$$

$$g(a) = [a], \forall a \in A$$

称 g 是从 A 到商集 A/R 的自然映射.



实例

例8

（1）A的每一个子集A'都对应于一个特征函数, 不同的子集对应于不同的特征函数. 例如 $A=\{a, b, c\}$, 则有

$$\chi_{\varnothing} = \{ <a,0>, <b,0>, <c,0> \},$$

$$\chi_{\{a,b\}} = \{ <a,1>, <b,1>, <c,0>\}$$

（2）给定集合 A 和 A 上的等价关系 R, 就可以确定一个自然映射 g：$A \rightarrow A/R$. 不同的等价关系确定不同的自然映射, 其中恒等关系所确定的自然映射是双射, 而其他的自然映射一般来说只是满射. 例如

$$A=\{1, 2, 3\},\ R=\{<1,2>,<2,1>\}\cup I_A$$

$$g(1) = g(2) = \{1,2\},\ g(3) = \{3\}$$

8.2 函数的复合与反函数

- 函数的复合
  - 函数复合的基本定理及其推论
  - 函数复合的性质
- 反函数
  - 反函数存在的条件
  - 反函数的性质

函数复合的基本定理

定理　设F, G是函数, 则$F\circ G$也是函数, 且满足

（1）$\mathrm{dom}(F\circ G)=\{\, x \mid x\in \mathrm{dom}F \land F(x)\in \mathrm{dom}G\}$

（2）$\forall x\in \mathrm{dom}(F\circ G)$ 有 $F\circ G(x) = G(F(x))$

证　先证明$F\circ G$是函数.

因为F, G是关系, 所以$F\circ G$也是关系.

若对某个$x\in \mathrm{dom}(F\circ G)$，$xF\circ Gy_1$和 $xF\circ Gy_2$, 则

$$<x, y_1>\in F\circ G\land<x, y_2>\in F\circ G$$

$$\Rightarrow \exists t_1(<x,t_1>\in F \land <t_1,y_1>\in G)$$

$$\land \exists t_2(<x,t_2>\in F \land <t_2,y_2>\in G)$$

$$\Rightarrow \exists t_1\exists t_2 (t_1=t_2 \land <t_1,y_1>\in G \land <t_2,y_2>\in G)$$

$$\Rightarrow y_1=y_2$$

所以 $F\circ G$ 为函数.

函数复合的基本定理（续）

任取x,

$$x\in \mathrm{dom}(F\circ G)$$

$$\Rightarrow \exists t\exists y\,(<x,t>\in F\wedge <t,y>\in G)$$

$$\Rightarrow \exists t\,(x\in \mathrm{dom}F\wedge t=F(x)\wedge t\in \mathrm{dom}G)$$

$$\Rightarrow x\in \{\, x \mid x\in \mathrm{dom}F\wedge F(x)\in \mathrm{dom}G \,\}$$

任取x,

$$x\in \mathrm{dom}F\wedge F(x)\in \mathrm{dom}G$$

$$\Rightarrow <x,F(x)>\in F\wedge <F(x),G(F(x))>\in G$$

$$\Rightarrow <x,G(F(x))>\in F\circ G$$

$$\Rightarrow x\in \mathrm{dom}(F\circ G)\wedge F\circ G(x)=G(F(x))$$

所以（1）和（2）得证.

推论

推论1 设F, G, H为函数, 则$(F\circ G)\circ H$和$F\circ(G\circ H)$都是函数, 且 $(F\circ G)\circ H=F\circ(G\circ H)$

证 由上述定理和关系合成具有结合性得证.

推论2 设 f: $A\to B$, g: $B\to C$, 则 $f\circ g$: $A\to C$, 且$\forall x\in A$都有 $f\circ g(x)=g(f(x))$.

证 由上述定理知 $f\circ g$是函数, 且

$$\mathrm{dom}(f\circ g) = \{\, x \mid x\in \mathrm{dom}f \wedge f(x)\in \mathrm{dom}g \,\}$$

$$=\{\, x \mid x\in A \wedge f(x)\in B\} = A$$

$$\mathrm{ran}(f\circ g) \subseteq \mathrm{ran}g \subseteq C$$

因此 $f\circ g$: $A\to C$, 且$\forall x\in A$有 $f\circ g(x) = g(f(x))$.

函数复合运算的性质

定理 设 f：$A\rightarrow B$，g：$B\rightarrow C$.

（1）如果 f：$A\rightarrow B$，g：$B\rightarrow C$ 都是满射的, 则 $f\circ g$：$A\rightarrow C$也是满射的.

（2）如果 f：$A\rightarrow B$，g：$B\rightarrow C$ 都是单射的, 则 $f\circ g$：$A\rightarrow C$也是单射的.

（3）如果 f：$A\rightarrow B$，g：$B\rightarrow C$ 都是双射的, 则 $f\circ g$：$A\rightarrow C$也是双射的.

证 （1）任取 $c\in C$, 由 g：$B\rightarrow C$的满射性, $\exists b\in B$ 使得 $g(b)=c$. 对于这个b, 由 f：$A\rightarrow B$ 的满射性，$\exists a\in A$ 使得 $f(a)=b$. 由合成定理有 $f\circ g(a)=g(f(a))=g(b)=c$

从而证明了 $f\circ g$：$A\rightarrow C$是满射的.

函数复合运算的性质

（2）假设存在 $x_1, x_2 \in A$使得

$$f\circ g(x_1) = f\circ g(x_2)$$

由合成定理有

$$g(f(x_1))=g(f(x_2))$$

因为 g：$B\to C$是单射的, 故 $f(x_1)=f(x_2)$. 又由于 f：$A\to B$ 也是单射的, 所以 $x_1=x_2$.

从而证明 $f\circ g$：$A\to C$是单射的.

（3）由（1）和（2）得证.

定理 设 $f{:}A\to B$，则

$$f = f\circ I_B = I_A\circ f$$

反函数存在的条件

任给函数 F, 它的逆F^{-1}不一定是函数, 是二元关系.

实例：$F=\{<a,b>,<c,b>\}$， $F^{-1}=\{<b,a>,<b,c>\}$

任给单射函数 f：$A\to B$, 则 f^{-1}是函数, 且是从 $\mathrm{ran}f$ 到 A的双射函数, 但不一定是从 B 到 A 的双射函数.

实例：$f: \mathrm{N} \to \mathrm{N}$, $f(x) = 2x$,

$f^{-1}: \mathrm{ran}f \to \mathrm{N}$, $f^{-1}(x) = x/2$

对于双射函数 f：$A\to B$, f^{-1}：$B\to A$是从 B 到 A 的双射函数.

实例： $f: \mathrm{R} \to \mathrm{R}$, $f(x) = x+1$

$f^{-1}: \mathrm{R}\to\mathrm{R}$, $f^{-1}(x) = x-1$

反函数

定理 设 $f: A \to B$ 是双射的, 则 $f^{-1}: B \to A$ 也是双射的.

证 因为 f 是函数, 所以 f^{-1} 是关系, 且

$$\mathrm{dom}\, f^{-1} = \mathrm{ran} f = B \,, \qquad \mathrm{ran}\, f^{-1} = \mathrm{dom} f = A,$$

对于任意的 $x \in B = \mathrm{dom}\, f^{-1}$, 假设有 $y_1, y_2 \in A$ 使得

$$<x, y_1> \in f^{-1} \wedge <x, y_2> \in f^{-1}$$

成立, 则由逆的定义有

单值

$$<y_1, x> \in f \wedge <y_2, x> \in f$$

根据 f 的单射性可得 $y_1 = y_2$, 从而证明了 f^{-1} 是函数，且是满射的. 下面证明 f^{-1} 的单射性.

若存在 $x_1, x_2 \in B$ 使得 $f^{-1}(x_1) = f^{-1}(x_2) = y$, 从而有

$$<x_1, y> \in f^{-1} \wedge <x_2, y> \in f^{-1}$$

单根

$$\Rightarrow <y, x_1> \in f \wedge <y, x_2> \in f \Rightarrow x_1 = x_2$$

反函数的定义及性质

对于双射函数f：$A\to B$, 称 f^{-1}：$B\to A$是它的反函数.

反函数的性质

定理　设 f：$A\to B$是双射的, 则

$$f^{-1}\circ f = I_B,\quad f\circ f^{-1} = I_A$$

对于双射函数 f：$A\to A$, 有

$$f^{-1}\circ f = f\circ f^{-1} = I_A$$

函数复合与反函数的计算

例 设 f: R→R, g: R→R

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & x\geq 3 \\ -2 & x<3 \end{cases} \qquad g(x)=x+2$$

求 $f\circ g$, $g\circ f$. 如果 f 和 g 存在反函数, 求出它们的反函数.

解 $f\circ g$: R→R $\qquad g\circ f$: R→R

$$f\circ g(x)=\begin{cases} x^2+2 & x\geq 3 \\ 0 & x<3 \end{cases} \qquad g\circ f(x)=\begin{cases} (x+2)^2 & x\geq 1 \\ -2 & x<1 \end{cases}$$

f: R→R不是双射的, 不存在反函数. g: R→R是双射的, 它的反函数是 g^{-1}: R→R, $g^{-1}(x) = x-2$

8.3 集合的等势与优势

定义 设A, B是集合, 如果存在着从A到B的**双射**函数, 就称A和B是等势的, 记作$A \approx B$. 如果A不与B等势, 则记作$A \not\approx B$.

集合等势的实例.

例 1 Z≈N.

$$f: Z \to N, \quad f(x) = \begin{cases} 2x & x \geq 0 \\ -2x-1 & x < 0 \end{cases}$$

则 f 是Z到N的双射函数. 从而证明了Z≈N.

例2 N×N≈N

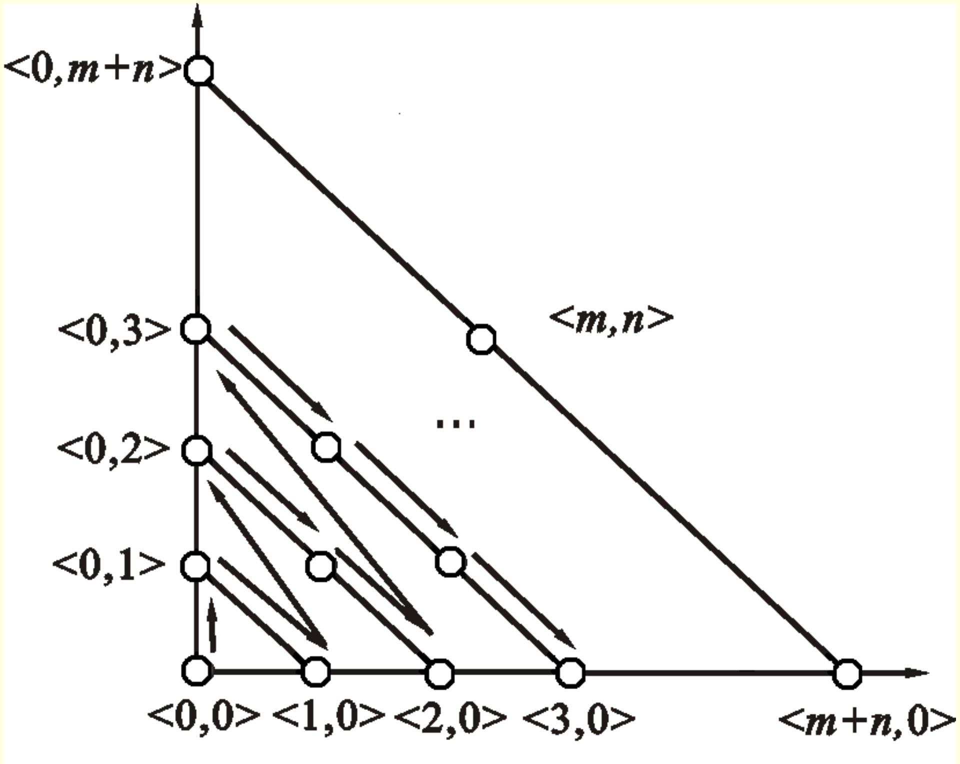
N×N中所有的元素
排成有序图形.

双射函数

$$f : \mathrm{N} \times \mathrm{N} \to \mathrm{N},$$

$$f(<m, n>)$$

$$= \frac{(m+n+1)(m+n)}{2} + m$$



实例

例3 (0,1)≈R. 其中实数区间 $(0,1)=\{ x \mid x \in R \wedge 0 < x < 1\}$. 令双射函数

$$f:(0,1)\to R,\quad f(x)=\tan \pi\frac{2x-1}{2}$$

例4 [0,1]≈(0,1). 其中(0,1)和[0,1]分别为实数开区间和闭区间. 双射函数 $f:[0,1]\to(0,1)$

$$f(x)=\begin{cases} 1/2 & x=0 \\ 1/2^2 & x=1 \\ 1/2^{n+2} & x=1/2^n, n=1,2,\ldots \\ x & \text{其它 } x \end{cases}$$

例5 对任何 $a, b\in R$, $a<b$, $[0,1]\approx[a,b]$.

双射函数 f: $[0,1]\to[a,b]$, $f(x)=(b-a)x+a$

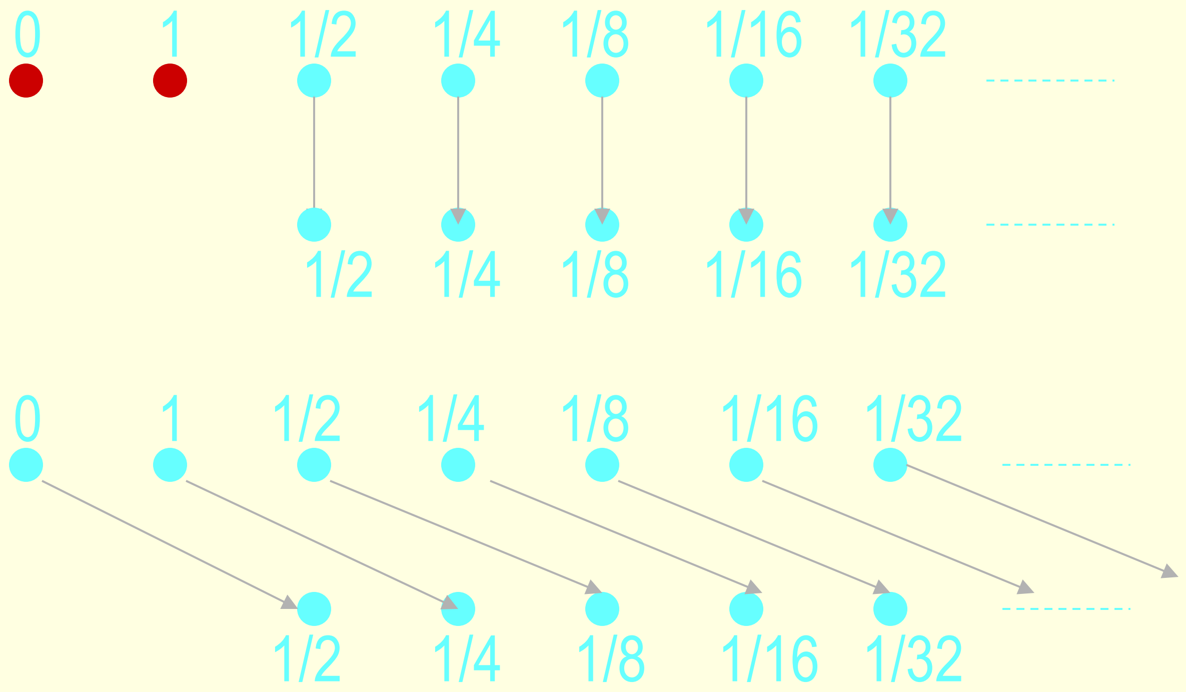
证明$[0,1]\approx(0,1)$

- 证明(2): $f: [0,1]\to(0,1)$,

$$f(x) = \begin{cases} 1/2, & x=0 \\ 1/4, & x=1 \\ 1/2^{(n+2)}, & x=1/2^n,\ n\in N-\{0\} \\ x, & \text{其他} \end{cases}$$

可以证明f是双射,

$\therefore [0,1]\approx(0,1)$ #


0
1
1/2
1/4
1/8
1/16
1/32
1/2
1/4
1/8
1/16
1/32
0
1
1/2
1/4
1/8
1/16
1/32
1/2
1/4
1/8
1/16
1/32

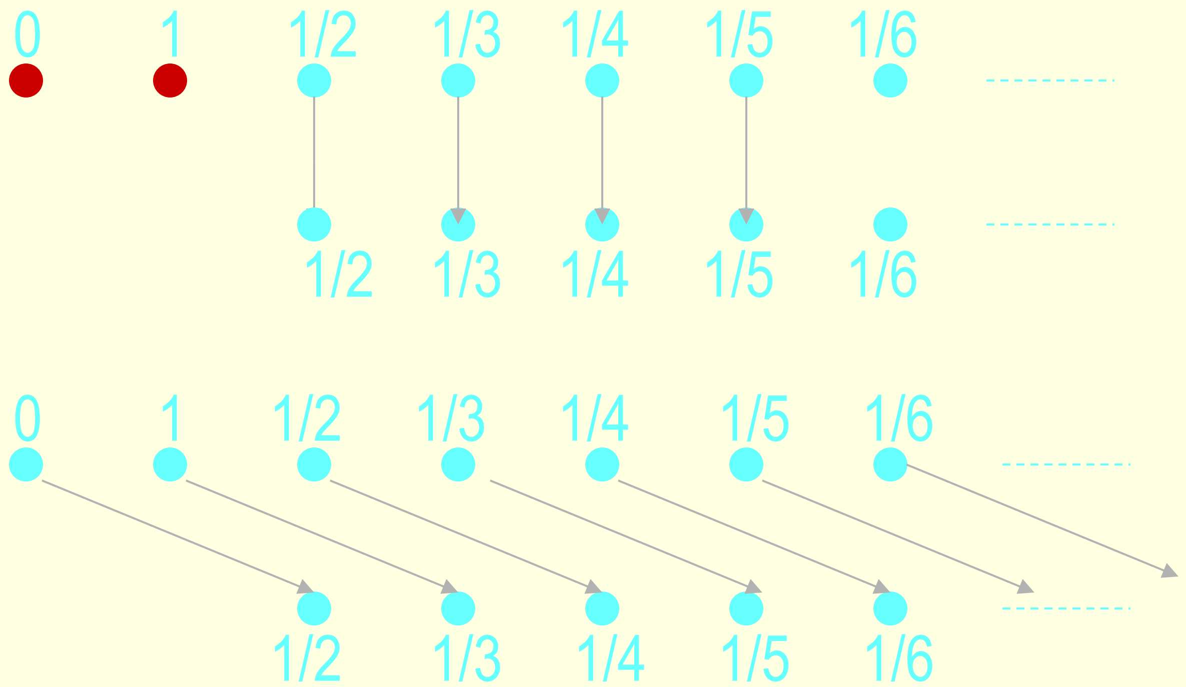
(5) 证明[0,1]≈(0,1)

- 证明(1): f: [0,1]→(0,1),

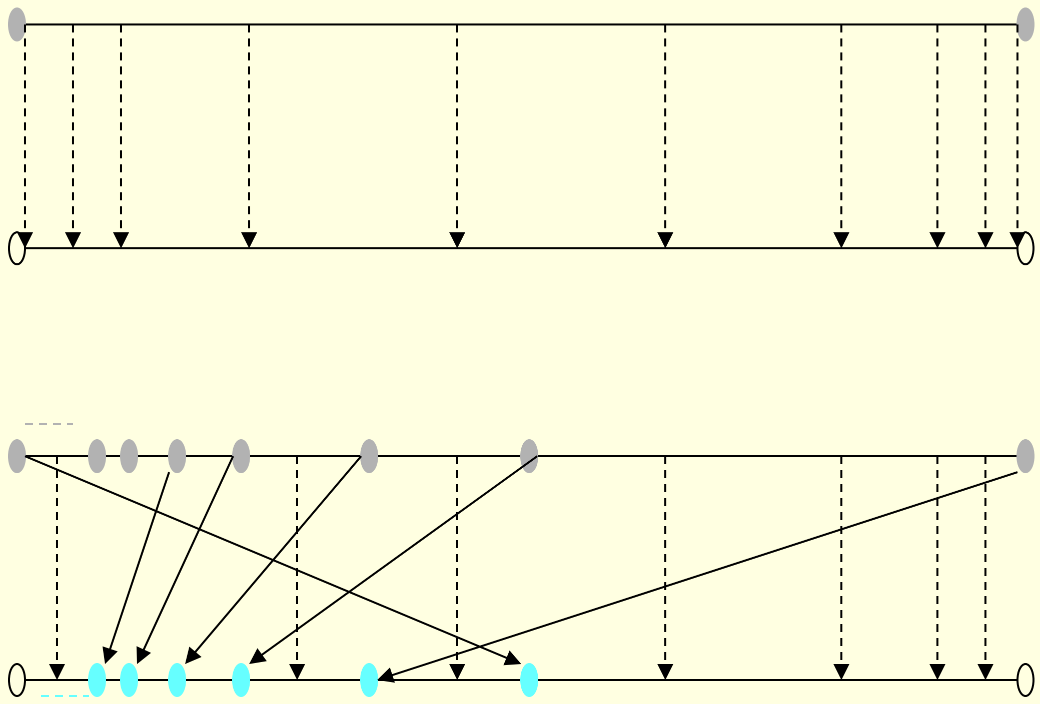
$$f(x) = \begin{cases} 1/2, & x=0 \\ 1/(n+2), & x=1/n,\ n\in N-\{0\} \\ x, & \text{其他} \end{cases}$$

可以证明f是双射,

∴[0,1]≈(0,1) #


0
1
1/2
1/3
1/4
1/5
1/6
1/2
1/3
1/4
1/5
1/6
0
1
1/2
1/3
1/4
1/5
1/6
1/2
1/3
1/4
1/5
1/6

[0,1]≈(0,1)



等势的性质

定理 设A，B，C是任意集合，

(1) $A \approx A$.

(2)若$A \approx B$，则$B \approx A$.

(3) 若$A \approx B$，$B \approx C$，则$A \approx C$.

重要的等势或不等势的结果

1．等势结果

N≈Z≈Q≈N×N

任何实数区间都与实数集合R等势

2．不等势的结果

定理9.2 (康托定理)

（1）$N \not\approx R$

（2）对任意集合A都有$A \not\approx P(A)$.

Cantor定理证明(1)

- (1) $N \not\approx R$

证明: (反证) 假设$N \approx R \approx [0,1]$, 则存在$f:N \to [0,1]$双射, 对$\forall n \in N$, 令$f(n)=x_{n+1}$,

于是$\mathrm{ran} f = [0,1] = \{x_1,x_2,x_3,\ldots,x_n,\ldots\}$将$x_i$表示成如下小数:

Cantor定理证明(1)

$$x_1=0.a_1^{(1)}\,a_2^{(1)}\,a_3^{(1)}\ldots\ldots$$
$$x_2=0.a_1^{(2)}\,a_2^{(2)}\,a_3^{(2)}\ldots\ldots$$
$$x_3=0.a_1^{(3)}\,a_2^{(3)}\,a_3^{(3)}\ldots\ldots$$
$$\vdots$$
$$x_n=0.a_1^{(n)}\,a_2^{(n)}\,a_3^{(n)}\ldots\ldots$$
$$\vdots$$

其中$0\le a_j^{(i)}\le 9$, $i,j=1,2,\ldots$

选一个[0,1]中的小数

$x=0.b_1b_2b_3\ldots\ldots$ 使得

(1) $0 \le b_j \le 9,\ i=1,2,\ldots$

(2) $b_n \ne a_n^{(n)}$

(3) 对x也注意表示的唯一性

由x的构造可知, $x\in[0,1]$, $x\notin\{x_1,x_2,x_3,\ldots,x_n,\ldots\}$

(x与x_n在第n位上不同).

这与$[0,1]=\{x_1,x_2,x_3,\ldots,x_n,\ldots\}$矛盾!

对角化方法

$$
\begin{array}{lllll}
a_1^{(1)} & a_2^{(1)} & a_3^{(1)} & \ldots\ldots & a_n^{(1)} \\
a_1^{(2)} & a_2^{(2)} & a_3^{(2)} & \ldots\ldots & a_n^{(2)} \\
a_1^{(3)} & a_2^{(3)} & a_3^{(3)} & \ldots\ldots & a_n^{(3)} \\
 & & \vdots & & \\
a_1^{(n)} & a_2^{(n)} & a_3^{(n)} & \ldots\ldots & a_n^{(n)} \\
 & & \vdots & &
\end{array}
$$

Cantor定理证明(2)

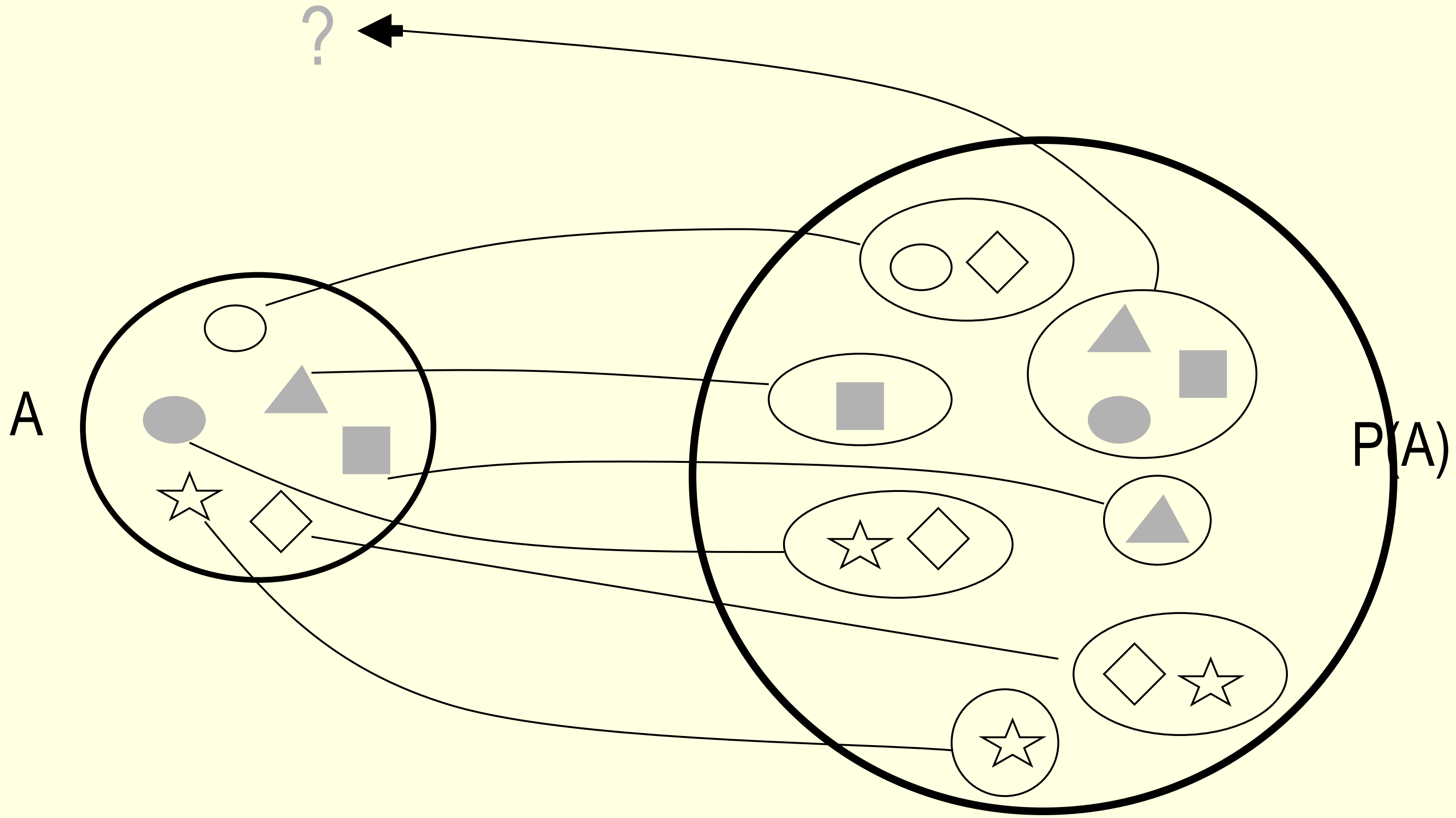
- 证明: (反证) 假设存在双射 $f:A\to P(A)$, 令

$$B = \{ x | x\in A \wedge x\notin f(x) \}$$

则$B\in P(A)$. 由f是双射, 设$f(b)=B$, 则

$$b\in B \Leftrightarrow b\notin f(b) \Leftrightarrow b\notin B,$$

矛盾! #



?
A
P(A)

集合的优势

定义

（1）设A, B是集合, 如果存在从A到B的单射函数, 就称B优势于A, 记作$A \preccurlyeq\cdot B$.

如果B不是优势于A, 则记作$A \not\preccurlyeq\cdot B$.

（2）设A, B是集合, 若$A \preccurlyeq\cdot B$且$A \neq B$, 则称B真优势于A, 记作$A \prec\cdot B$.

如果B不是真优势于A, 则记作$A \not\prec\cdot B$.

实例：

$\mathbf{N} \preccurlyeq\cdot \mathbf{N}$, $\mathbf{N} \preccurlyeq\cdot \mathbf{R}$, $A \preccurlyeq\cdot P(A)$,

$\mathbf{R} \not\preccurlyeq\cdot \mathbf{N}$.

$\mathbf{N} \prec\cdot \mathbf{R}$, $A \prec\cdot P(A)$, 但$\mathbf{N} \not\prec\cdot \mathbf{N}$.

自然数与自然数集合

定义 设a为集合, 称$a\cup\{a\}$为a的后继, 记作a^+,

即 $a^+=a\cup\{a\}$.

如下定义自然数:

$0=\varnothing$

$1=0^+=\varnothing^+ = \{\varnothing\}=\{0\}$

$2=1^+= \{\varnothing\}^+ = \{\varnothing\}\cup\{\{\varnothing\}\}=\{\varnothing,\{\varnothing\}\}=\{0,1\}$

$3=2^+=\{\varnothing,\{\varnothing\}\}^+= \{\varnothing,\{\varnothing\},\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\}= \{0,1,2\}$

…

$n=\{0,1,\ldots,n-1\}$

…

有穷集和无穷集

定义

一个集合是有穷的当且仅当它与某个自然数等势;

如果一个集合不是有穷的, 就称作无穷集.

实例:

$\{a,b,c\}$是有穷集, 因为$3=\{0,1,2\}$, 且

$$\{a,b,c\}\approx\{0,1,2\}=3$$

N和R都是无穷集, 因为没有自然数与N和R等势.

用自然数的性质可以证明:

任何有穷集只与惟一的自然数等势.

集合基数的定义

定义

（1）对于有穷集合A, 称与A等势的那个惟一的自然数为A的基数, 记作card$A$, 即

$$\mathrm{card}A=n \Leftrightarrow A\approx n$$ （对于有穷集A, card$A$也可以记作$|A|$）

（2）自然数集合N的基数记作$\aleph_0$, 即

$$\mathrm{card}N=\aleph_0$$

（3）实数集R的基数记作$\aleph$（读作阿列夫）, 即

$$\mathrm{card}R=\aleph$$

基数的相等和大小

定义 设A, B为集合, 则

（1）$\mathrm{card}A=\mathrm{card}B \Leftrightarrow A\approx B$

（2）$\mathrm{card}A\le\mathrm{card}B \Leftrightarrow A\preccurlyeq\cdot B$

（3）$\mathrm{card}A<\mathrm{card}B \Leftrightarrow$

$\mathrm{card}A\le\mathrm{card}B\wedge\mathrm{card}A\ne\mathrm{card}B$

根据上一节关于势的讨论不难得到:

$\mathrm{card}\,\mathrm{Z}=\mathrm{card}\mathrm{Q}=\mathrm{card}\mathrm{N}\times\mathrm{N}=\aleph_0$

$\mathrm{card}P(\mathrm{N})=\mathrm{card}2^{\mathrm{N}}=\mathrm{card}[a,b]=\mathrm{card}(c,d)=\aleph$

$\aleph_0<\aleph$

其中$2^{\mathrm{N}}=\{0,1\}^{\mathrm{N}}$.

有穷基数与无穷基数

由于对任何集合A都满足$A \prec\cdot P(A)$, 所以有

$$\mathrm{card}\, A < \mathrm{card}\, P(A)$$

这说明不存在最大的基数. 将已知的基数按从小到大的顺序排列就得到:

$$0, 1, 2, \ldots, n, \ldots, \aleph_0, \aleph, \ldots$$

其中:

0, 1, 2…, n, …, 恰好是全体自然数, 是有穷基数.

$\aleph_0$, $\aleph$, …, 是无穷基数,

$\aleph_0$是最小的无穷基数, $\aleph$后面还有更大的基数, 如 card P(R)等.

作业

- 习题八

4, 9, 13, 19, 24,