离散数学
组合数学

北京大学信息科学技术学院

教学安排

- 主要内容：
  - 集合论——集合代数、关系、函数及集合基数（第**6－8**章）
  - 代数结构简介——代数系统、群、环、格（第**9－11**章）
  - 组合数学——组合计数、递推关系和生成函数、几个重要的组合定理（第**12－13**章）

教学安排

- 学习安排：课上讲授 10次+自己做习题
  - 李素建（前5次）；曹永知老师（后5次）
  - 内容会有所调整

周	内容	时间
1	集合代数 (第6章)	6.3
2	关系（定义、运算、性质）(第7章)	**6.9（调课）**
3	关系（关系性质的证明、等价关系与偏序关系）(第7章)	6.17
4	函数（函数）(第8章)	7.1
5	代数系统（代数运算及性质、代数系统、群环域格与布尔代数的定义） (第9-10章)	7.8
6	组合计数	9.2
7	递推关系与生成函数定义（递推关系求解、生成函数的定义）	9.9
8	生成函数的应用、指数生成函数、特殊计数	9.16
9	鸽巢原理（补充）、Polya定理的应用（补充）、知识点小结	10.14
10	试题解答与分析	10.21

教学安排

- 教材和参考书
  - 教材：离散数学，屈婉玲，耿素云，张立昂，高等教育出版社，2008.3
  - 参考书1：离散数学学习指导与习题解析，屈婉玲，耿素云，张立昂，2008.6
  - 参考书2：组合数学, Richard A. Brualdi著, 机械工业出版社.
  - 参考书3：《离散数学教程》，耿素云 屈婉玲 王捍贫编著，北京大学出版社
- 资料下载：

http://123.56.88.210/combinatorics.htm

- 作业：写在作业纸上

教材与参考书


普通高等教育"十一五"国家级规划教材配套参考书
离散数学
学习指导与习题解析
高等教育出版社
Higher Education Press
国家精品课程主讲教材

第6章 集合的基本概念和运算

- 数理逻辑的基本概念
- 集合的基本概念
- 集合的基本运算
- 有穷集元素的计数
- 集合恒等式

数理逻辑

- 命题逻辑
  - 命题和命题联结词
  - 命题等值式
  - 命题推理
- 谓词逻辑
  - 谓词
  - 量词

- 命题是客观上能判明真假的陈述句。当命题为真时，称命题的真值为“真”；否则，说命题的真值为“假”。用T或1表示“真”，用F或0表示“假”。

  （Proposition: a statement that is either true or false,but not both.）
- 所有这些命题，都应具有确定的真值。

联结词的真值表

P	Q	$\neg P$	$P \wedge Q$	$P \vee Q$	$P \rightarrow Q$	$P \leftrightarrow Q$
0	0	1	0	0	1	1
0	1	1	0	1	1	0
1	0	0	0	1	0	0
1	1	0	1	1	1	1

等值式(logical equivalences)

幂等律 $A \Leftrightarrow A \vee A, \quad A \Leftrightarrow A \wedge A$

交换律 $A \vee B \Leftrightarrow B \vee A, A \wedge B = B \wedge A$

结合律 $(A \vee B) \vee C \Leftrightarrow A \vee (B \vee C), (A \wedge B) \wedge C \Leftrightarrow A \wedge (B \wedge C)$

分配律 $A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C), A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$

德•摩根律 $\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B, \neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$

吸收律 $A \vee (A \wedge B) \Leftrightarrow A, A \wedge (A \vee B) \Leftrightarrow A$

零律 $A \vee 1 \Leftrightarrow 1, A \wedge 0 \Leftrightarrow 0$

同一律 $A \vee 0 \Leftrightarrow A, A \wedge 1 \Leftrightarrow A$

排中律 $A \vee \neg A \Leftrightarrow 1$

矛盾律 $A \wedge \neg A \Leftrightarrow 0$

双重否定律 $\neg\neg A \Leftrightarrow A$

蕴涵等值式 $A \to B \Leftrightarrow \neg A \vee B$

等价等值式 $A \leftrightarrow B \Leftrightarrow (A \to B) \wedge (B \to A)$

等价否定等值式 $A \leftrightarrow B \Leftrightarrow \neg A \leftrightarrow \neg B$

假言易位 $A \to B \Leftrightarrow \neg B \to \neg A$

归缪论 $(A \to B) \wedge (A \to \neg B) \Leftrightarrow \neg A$

命题逻辑推理

1. 推理的形式结构

前提: $\mathbf{A^1, A^2, \ldots, A^k}$

结论: $\mathbf{B}$

推理的形式结构:

$$\mathbf{(A^1 \wedge A^2 \wedge \ldots \wedge A^k) \to B}$$

若推理的形式结构为重言式，则称推理正确。

用“$A \Rightarrow B$”表示“$A \to B$”是重言式

推理定律

附加律 $A \Rightarrow A \vee B$

化简律 $(A \wedge B) \Rightarrow A$, $(A \wedge B) \Rightarrow B$

假言推理定律 $(A \rightarrow B) \wedge A \Rightarrow B$

拒取式推理定律 $(A \rightarrow B) \wedge \neg B \Rightarrow \neg A$

析取三段论推理定律 $(A \vee B) \wedge \neg B \Rightarrow A$; $(A \vee B) \wedge \neg A \Rightarrow B$

假言三段论推理定律 $(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow C) \Rightarrow (A \rightarrow C)$

等价三段论推理定律 $(A \leftrightarrow B) \wedge (B \leftrightarrow C) \Rightarrow (A \leftrightarrow C)$

构造性二难推理定律 $(A \rightarrow B) \wedge (C \rightarrow D) \wedge (A \vee C) \Rightarrow (B \vee D)$

谓词的概念

命题是反映判断的句子。反映判断的句子由主语和谓语两部分组成。主语一般是客体；用以刻划客体性质或关系的部分即是谓语。**在命题中作为主语的客体称为个体。而用以描述个体性质或几个个体间关系的部分称为谓词。**

- 用谓词表达命题，必须包括个体和谓词两部分。一般地说，“b是A”类型的命题可用A(b)表达。而表示两个或两个以上客体之间关系的命题，可表示成B(x，y)，L(a，b，c)。
- **表示一个个体的性质的谓词称为一元谓词，如Q（e）。而表述n个个体相互关系的谓词称为n元谓词，可表示为Q(e_1，e_2，…，e_n)。**

量词

考虑命题“所有的人都是要死的”和“有些人能活百岁以上”的符号化问题，除个体变元和谓词之外，还有对个体在数量上的量化和约束，如“所有的”和“有些”，称这种表示数量的词为量词。

- **用符号$\forall$表达“对所有的”，“对任一个”，“对每一个”等词，叫做全称量词。**

例如，“所有的人都是要死的”。设**M(x) : x**是人。**D(x) : x**是要死的。则命题可符号化为：$(\forall x)(M(x) \rightarrow D(x))$。

- **用符号$\exists$表达“至少有一个”，“存在一个”，“对某些”等词，叫做存在量词。**

例如，“有些人能活百岁以上”。设**M(x):x**是人。**L(x): x**能活百岁以上。则命题可符号化为：$(\exists x)(M(x) \wedge L(x))$。

量词与联结词¬之间的关系

$\neg(\forall x)A(x) \Leftrightarrow (\exists x)\neg A(x)$。 (1)

$\neg(\exists x)A(x) \Leftrightarrow (\forall x)\neg A(x)$。 (2)

例如，设A(x)表示“x今天来校上课”，则¬A(x)表示“x今天没来校上课”。那麽，

对(1), “不是所有的人今天都来上课¬(∀x)A(x) ”与“有(存在)一些人今天没来上课(∃x)¬A(x)”在意义上是相同的。

对(2), “今天没有(不存在)来上课的人¬(∃x)A(x) ”与“所有的人今天都没来上课(∀x)¬A(x)”在意义上是相同的。

(1)和(2)式称为量词转换律。这里约定，出现在量词之前的否定不是否定该量词，而是否定被量化了的整个命题。例如，$\neg(\forall x)A(x) \Leftrightarrow \neg((\forall x)A(x))$。

6.1 集合的基本概念

- 集合与元素
- 集合之间的关系
- 空集
- 全集
- 幂集

集合与元素

集合　没有精确的数学定义

集合的表示

　　列元素法　$A=\{a, b, c, d\}$

　　谓词表示法　$B=\{x \mid P(x)\}$

　　　B 由使得 $P(x)$ 为真的 x 构成

注意:

1）集合中的元素各不相同

2）集合中的元素不规定顺序

3）集合的两种表示方法有时是可以相互转化的

例：$B=\{x|x \in N$且x为非0偶数$\}$，或$\{x|x=2(k+1)$且$k \in N\}$

几个常用的集合及其记号:

N(自然数集合): + *封闭,逆运算不封闭

Z (整数集合): + 及其逆运算,*封闭, 但*的逆运算不封闭

Q (有理数集合) : +,*,逆运算封闭，全序域，具有稠密性空隙（不连通）

R(实数集合)

C(复数集合)

集合与元素

元素与集合的关系：隶属关系

属于$\in$，不属于 $\notin$

实例

$A=\{ x \mid x\in R \wedge x^2-1=0 \}$, $A=\{-1,1\}$

$1\in A$, $2\notin A$

注意：对于任何集合 A 和元素 x (可以是集合)，

$x\in A$和 $x\notin A$ 两者成立其一，且仅成立其一.

隶属关系的层次结构

例 1

$A=\{\, a, \{b,c\}, d, \{\{d\}\} \,\}$

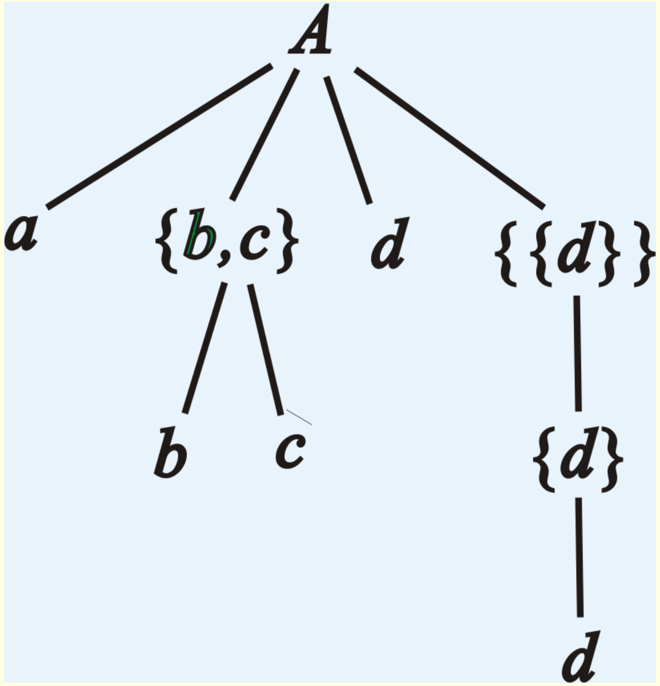
$\{b,c\}\in A$

$b\notin A$

$\{\{d\}\}\in A$

$\{d\}\notin A$

$d\in A$



$d \in A$, $b \notin A$

集合之间的关系

- 子集、相等、真子集
- 空集、全集
- 幂集、**n**元集、有限集
- 集族

- 定义1.1　给定集合A和B，如果B中每个元素都是A中的元素，则称B为A的子集(subset)，记作$B\subseteq A$或$A\supseteq B$，读作“B包含于A”或“A包含B”。

$$A\subseteq B \Leftrightarrow (\forall x)(x\in A\rightarrow x\in B)$$

设A={a,b,c}, B={a,b,c,d}, C={a,b}，则$A\subseteq B$, $C\subseteq A$, $C\subseteq B$

按子集的定义，对于任何集合A、B、C，

(1) $A\subseteq A$（自反性）

(2) $(A\subseteq B)\wedge(B\subseteq C)\Rightarrow(A\subseteq C)$　（传递性）

"A是B的**子集(subset)**"，记作$A\subseteq B$ 是指：

（1）A中的所有元素都是B的元素。或者

（2）在A中找不到一个不属于B的元素。或者

（3）对$\forall x\in A$，均有$x\in B$。

"A**不是**B的子集"是指：

A中至少有一个元素不属于B。

（$\exists x\in A$，但$x\notin B$）

记作$A\nsubseteq B$。

证明：$A \not\subseteq B \Leftrightarrow (\exists x)(x \in A \wedge x \notin B)$

证明：$A \not\subseteq B \Leftrightarrow \neg (A \subseteq B)$

$\Leftrightarrow \neg ((\forall x)(x \in A \rightarrow x \in B))$

$\Leftrightarrow (\exists x) \neg (\neg(x \in A) \vee (x \in B))$

$\Leftrightarrow (\exists x) (x \in A \wedge x \notin B)$

• 定义1.2 **两个**Ａ和Ｂ，若A包含B且B包含A，则称**A与B相等**，记作Ａ＝Ｂ。集合Ａ与Ｂ不相等，记作Ａ≠Ｂ。

$$A=B \Leftrightarrow (\forall x)(x\in A \leftrightarrow x\in B)$$

$$\Leftrightarrow (A\subseteq B)\wedge(B\subseteq A)$$

例：设A= {2}, B={1，4}, C={x|x^2-5x+4=0}, D={x| x为偶素数}

则 A=D , B=C

• 定义1.3　给定集合A和B，如果$A \subseteq B$且$A \neq B$，则称A为B的真子集，记作$A \subset B$。

$$A \subset B \Leftrightarrow (\forall x)(x \in A \rightarrow x \in B) \wedge (\exists x)(x \in B \wedge x \notin A)$$

设三个集合A，B，C，从定义可以得到下面3个命题为真：

(1) $A \not\subset A$； (2) 若$A \subset B$，则$B \not\subset A$；

(3) 若$A \subset B$且$B \subset C$，则$A \subset C$

- **空集**

定义1.4　不含任何元素的集合叫空集，记作Φ。

例如，　$\Phi=\{x|P(x)\wedge\neg P(x)\}$，$P(x)$是任意谓词。

$A=\{x|x\in R\wedge x^2+1=0\}$是空集，式中R表示实数集合。

- **全集**

定义1.5 在研究某一问题时，如果限定所讨论的集合都是某一集合的子集，则称该集合为全集，记作E。即

$E=\{x|P(x)\vee\neg P(x)\}$。（$P(x)$是任意谓词）

显然，全集的概念相当于论域，它是一个相对概念。

例如，如果讨论(a, b)上的实数，就取(a, b)为全集。也可以取[a, b)，(a, b]，实数集R等为全集。

定理1.1 空集是任意集合的子集。

证明：任给集合A，Φ是空集。则（$\forall x)(x\in\Phi\rightarrow x\in A)$ 永真，这是因为条件式的前件$(x\in\Phi)$永假，所以该条件式对一切x皆为真。按子集的定义，$\Phi\subseteq A$为真。 #

推论 空集是唯一的。

证明：证：假定Φ_1和Φ_2为二空集。

由定理2，$\Phi_1\subseteq\Phi_2$，$\Phi_2\subseteq\Phi_1$。

再根据定理1，$\Phi_1=\Phi_2$ 。 #

- 定义1.6 集合A的所有子集构成的集合叫A的幂集(power set)，记作P(A)。用描述法表示为：**P(A)={x | x⊆A}**。

- 性质

（1） x ∈ P(A) 当且仅当 x ⊆ A 。

（2）设A, B是两个集合, A ⊆ B当且仅当P(A)⊆ P(B) 。

含有n个元素的集合为n元集(n≥1)

例，设A＝{a, b, c}, 则

0元子集：　**Φ;**

1元子集：　**{a},{b},{c};**

2元子集：　**{a,b},{a,c},{b,c}**

3元子集：　**{a,b,c}**

P(A)＝{Φ,{a},{b},{c},{a,b},{a,c},{b,c},{a,b,c}}

定理1.2 设A有 n 个元素，则P(A)有2^n个元素。

证明：A的所有由 k 个元素组成的子集个数为从 n 个元素中取 k 个元素的组合数：

$$C_n^k = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{k!} \qquad (x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k . x^k . y^{n-k}$$

另外，因Φ⊆A，故P(A)中元素的个数N可表示为：

$$N = C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^k + \ldots + C_n^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k$$

在$(x+y)^n$的展开式中令x=y=1得：

$$2^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k = N$$

#

集族：由集合构成的集合

- 定义1.7 设A为一个集族，S为一个集合，若对于任意的$\alpha \in S$，存在唯一的 $A_{\alpha} \in A$与之对应，而且A中的任何集合都对应S中的某一个元素，则称A是以S为指标集的**集族**，S称为 A 的**指标集**。

$\varnothing$为**空集族**

定义： 设**A**是一个集合。若**A**的元素都是集合，则称**A**为**集合族**。若集合族**A**可表示为**A**=$\{S_d | d \in D\}$,则称D为集合族**A**的**指标集**。

6.2 集合的基本运算

集合基本运算的定义

$\cup \quad \cap \quad - \quad \sim \quad \oplus$

文氏图（**John Venn**）

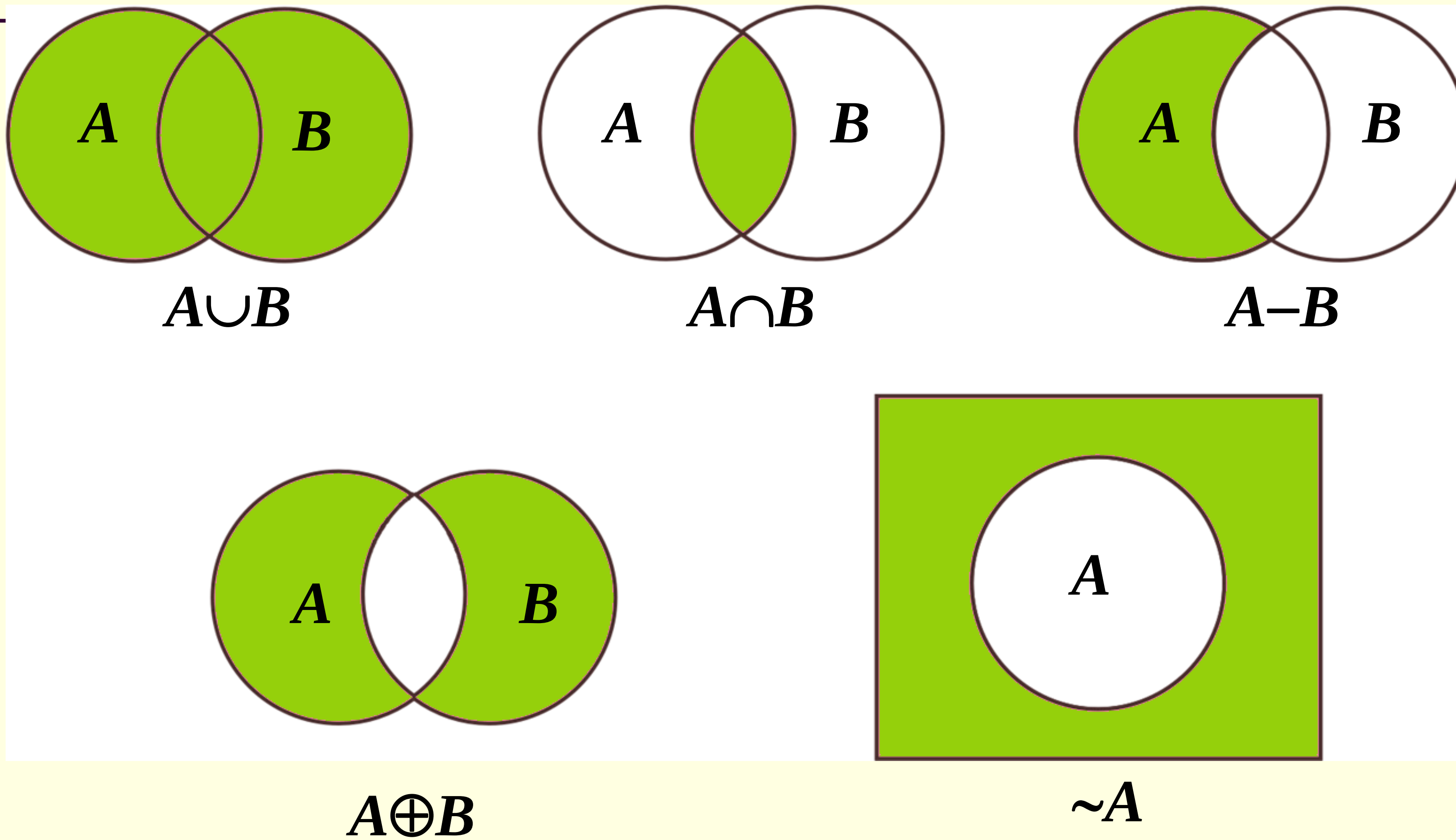
运算顺序

重要结果

集合基本运算的定义

并	$A \cup B = \{ x \mid x \in A \lor x \in B \}$
交	$A \cap B = \{ x \mid x \in A \land x \in B \}$
相对补	$A - B = \{ x \mid x \in A \land x \notin B \}$
对称差	$A \oplus B = (A-B) \cup (B-A)$
	$=(A \cup B)-(A \cap B)$
绝对补	$\sim A = E - A$

文氏图表示



注意：文氏图只是对某些集合之间的关系及运算结果给出一种**直观而形象的示意性的表示**，而**不能用来证明**集合等式及包含关系。

广义运算

定义

广义并 $\cup A = \{ x \mid \exists z (z \in A \wedge x \in z)\}$

广义交 $\cap A = \{ x \mid \forall z (z \in A \rightarrow x \in z)\}$

实例

$$\cup\{\{1\}, \{1,2\}, \{1,2,3\}\}=\{1,2,3\}$$

$$\cap\{\{1\}, \{1,2\}, \{1,2,3\}\}=\{1\}$$

$$\cup\{\{a\}\}=\{a\}, \quad \cap\{\{a\}\}=\{a\}$$

$$\cup\{a\}=a, \quad \cap\{a\}=a$$

广义并、广义交 举例

- 设 $\mathcal{A}_1=\{a,b,\{c,d\}\}$, $\mathcal{A}_2=\{\{a,b\}\}$, $\mathcal{A}_3=\{a\}$,
  $\mathcal{A}_4=\{\varnothing,\{\varnothing\}\}$, $\mathcal{A}_5=a(a\neq\varnothing)$, $\mathcal{A}_6=\varnothing$, 则

$\cup\mathcal{A}_1= a\cup b\cup\{c,d\}$, $\cap\mathcal{A}_1= a\cap b\cap\{c,d\}$,

$\cup\mathcal{A}_2=\{a,b\}$, $\cap\mathcal{A}_2=\{a,b\}$,

$\cup\mathcal{A}_3=a$, $\cap\mathcal{A}_3=a$

$\cup\mathcal{A}_4=\varnothing\cup\{\varnothing\}=\{\varnothing\}$, $\cap\mathcal{A}_4=\varnothing\cap\{\varnothing\}=\varnothing$,

$\cup\mathcal{A}_5= \cup a$, $\cap\mathcal{A}_5= \cap a$

$\cup\mathcal{A}_6=\varnothing$, $\cap\mathcal{A}_6=E$ (或者无定义)

有关广义运算的说明

- 广义运算的性质

(1) $\cup\varnothing=\varnothing$，$\cap\varnothing$无意义

(2) 单元集$\{x\}$的广义并和广义交都等于x

(3) 广义运算减少集合的层次（括弧减少一层）

(4) 广义运算的计算：一般情况下可以转变成初级运算

$$\cup\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}=A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_n$$

$$\cap\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}=A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_n$$

- 引入广义运算的意义

可以表示无数个集合的并、交运算，例如

$$\cup\{\{x\} \mid x\in\mathbf{R}\}=\mathbf{R}$$

关于运算的说明

- 普通运算顺序： ~和幂集优先，其他由括号确定
- 广义运算优先于普通运算
- 并和交运算可以推广到有穷个集合上，即

  $A_1 \cup A_2 \cup \ldots A_n = \{x \mid x \in A_1 \vee x \in A_2 \vee \ldots \vee x \in A_n\}$

  $A_1 \cap A_2 \cap \ldots A_n = \{x \mid x \in A_1 \wedge x \in A_2 \wedge \ldots \wedge x \in A_n\}$

- 某些重要结果

  $\varnothing \subseteq A - B \subseteq A$

  $A \subseteq B \Leftrightarrow A - B = \varnothing$（后面证明）

  $A \cap B = \varnothing \Leftrightarrow A - B = A$

6.3有穷集合的计数

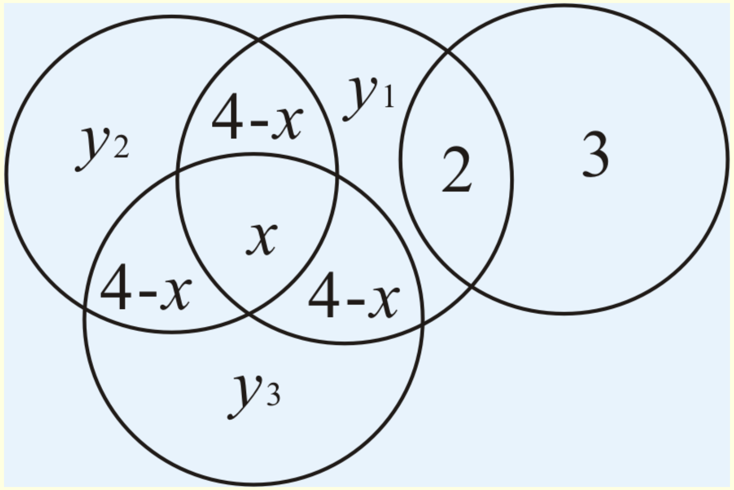
文氏图法

例2　24名科技人员，每人至少会1门外语.

英语：13；　日语：5；　德语：10；　法语：9

英日：2；　　英德：4；　英法：4；　　法德：4

会日语的不会法语、德语，求：只会 1 种语言人数，会 3 种语言人数



$x+2(4-x)+y_1+2=13$

$x+2(4-x)+y_2=10$

$x+2(4-x)+y_3=9$

$x+3(4-x)+y_1+y_2+y_3=19$

$x=1, y_1=4, y_2=3, y_3=2$

有穷集计数—容斥原理

定理　设 S 为有穷集，$P_1, P_2, \ldots, P_m$ 是 m 种性质，A_i 是 S 中具有性质P_i 的元素构成的子集，i=1, 2, …, m. 则 S 中不具有性质 $P_1, P_2, \ldots, P_m$ 的元素数为

$$|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \ldots \cap \overline{A_m}| = |S| - \sum_{i=1}^{m} |A_i| + \sum_{1 \le i < j \le m} |A_i \cap A_j|$$

$$- \sum_{1 \le i < j < k \le m} |A_i \cap A_j \cap A_k| + \ldots + (-1)^m |A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_m|$$

推论：S 中至少具有一条性质的元素数为

$$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_m| = \sum_{i=1}^{m} |A_i| - \sum_{1 \le i < j \le m} |A_i \cap A_j|$$

$$+ \sum_{1 \le i < j < k \le m} |A_i \cap A_j \cap A_k| + \ldots + (-1)^{m-1} |A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_m|$$

[例1.2] 对24名科技人员进行掌握外语情况的调查，统计资料如下：会说英、日、德、法语的人数分别为13，5，10，9。其中同时会说英语、日语的人数为2，同时会说英语、德语、或同时会说英语、法语，或同时会说德语、法语两种语言的人数均为4，会说日语的人既不会说法语也不会德语，试求只会说一种语言的人数各为多少？又同时会说英、德、法语的人数为多少？

解：设$E=\{x|x$是24名科技人员之一$\}$，$|E|=24$

$A=\{x\in E|x$会说英语$\}$，　$B=\{x\in E|x$会说日语$\}$，

$C=\{x\in E|x$会说德语$\}$　$D=\{x\in E|x$会说法语$\}$，

已知：

$|A \cup B \cup C \cup D| = 24$， $|A|=13$, $|B|=5$, $|C|=10$, $|D|=9$,
$|A \cap B| =2$, $|A \cap C| = |A \cap D| = |C \cap D| = 4$,

$|B \cap C| = |B \cap D| = |A \cap B \cap C| = |A \cap B \cap D| = |B \cap C \cap D|$

$= |A \cap B \cap C \cap D| = 0$, $|A \cup B \cup C \cup D| = 24$

$|A \cup B \cup C \cup D|$

$= |A|+|B|+|C| +|D| -|A \cap B|-|A \cap C| -|A \cap D| -|B \cap C| - |B \cap D|$
$- |C \cap D| +|A \cap B \cap C|+ |A \cap B \cap D|+ |B \cap C \cap D| + |A \cap C \cap D|$
$- |A \cap B \cap C \cap D|$

把已知代入上面公式可得：$|A \cap C \cap D| = 1$

设只会说英日德法语的人数分别为x1,x2,x3,x4，则

$x1=|A|-|(B \cup C \cup D) \cap A| = |A|-|(B \cap A) \cup (C \cap A) \cup (D \cap A)|=4$, $x2=3$, $x3=3$, $x4=2$ #

容斥定理的应用

[例1.1] 在1到10000之间既不是某个整数的平方，也不是某个整数的立方的数有多少个?

解: 设 $E=\{x\in N|1\le x\le 10000\}$, $|E|=10000$

$A=\{x\in E|x=k^2\wedge k\in Z\}$, $|A|=100$

$B=\{x\in E|x=k^3\wedge k\in Z\}$, $|B|=21$

则 $|\sim(A\cup B)|=|E|-|A\cup B|$

$=|E|-(|A|+|B|-|A\cap B|)$

$=10000-100-21+4=9883$

注意 $A\cap B=\{x\in E|x=k^6\wedge k\in Z\}$, $|A\cap B|=4$. #

应用

例3 求1到1000之间（包含1和1000在内）既不能被 5 和6 整除，也不能被 8 整除的数有多少个?

解：$S = \{ x \mid x \in Z, 1 \le x \le 1000 \}$,

如下定义 S 的 3 个子集 A, B, C:

$A = \{ x \mid x \in S, 5 \mid x \}$,

$B = \{ x \mid x \in S, 6 \mid x \}$,

$C = \{ x \mid x \in S, 8 \mid x \}$

例3（续）

$|S|=1000$,

$|A|=\lfloor 1000/5 \rfloor=200$,

$|B|=\lfloor 1000/6 \rfloor=166$,

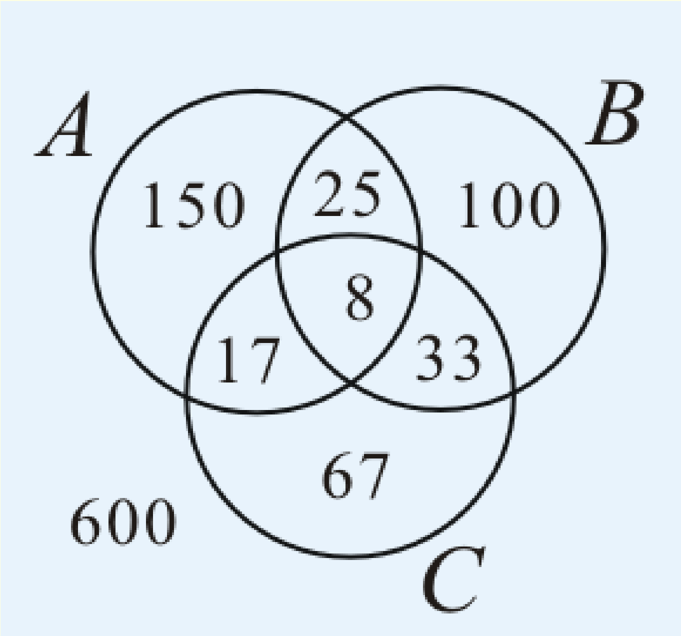
$|C|=\lfloor 1000/8 \rfloor=125$,

$|A\cap B|=\lfloor 1000/30 \rfloor=33$,

$|A\cap C|=\lfloor 1000/40 \rfloor=25$,

$|B\cap C|=\lfloor 1000/24 \rfloor=41$,

$|A\cap B\cap C|=\lfloor 1000/120 \rfloor=8$,



$$N=|S|-(|A|+|B|+|C|)+(|A\cap B|+|A\cap C|+|B\cap C|)-|A\cap B\cap C|$$
$$=1000-(200+166+125)+(33+25+41)-8=600$$

计数有限制条件的元素数

例4 求不超过120的素数个数

解：$11^2 = 121$，

不超过120的合数的素因子可能是2, 3, 5, 7，

$$S = \{ x \mid x \in \mathbf{Z}, 1 \le x \le 120 \}, |S| = 120$$

被2, 3, 5, 7 整除的集合分别为A_1, A_2, A_3, A_4

所求的元素数

$$N = |\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3} \cap \overline{A_4}| + 3$$

+3的理由是：2,3,5,7四个数是能够被2,3,5或7整除的，但是它们是素数；而1是不能被2,3,5和7整除的，但是1不是素数.

计数有限制条件的元素数(续)

$|A_1| = 60$，$|A_2| = 40$，$|A_3| = 24$，$|A_4| = 17$

$|A_1 \cap A_2| = 20$, $|A_1 \cap A_3| = 12$, $|A_1 \cap A_4| = 8$,

$|A_2 \cap A_3| = 8$, $|A_2 \cap A_4| = 5$, $|A_3 \cap A_4| = 3$

$|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 4$, $|A_1 \cap A_2 \cap A_4| = 2$, $|A_1 \cap A_3 \cap A_4| = 1$,

$|A_2 \cap A_3 \cap A_4| = 1$, $|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4| = 0$

$$N = |\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3} \cap \overline{A_4}| + 3$$

$$= 120 - (60 + 40 + 24 + 17) + (20 + 12 + 8 + 8 + 5 + 3)$$

$$- (4 + 2 + 1 + 1) + 0 + 3$$

$$= 120 - 141 + 56 - 8 + 3 = 30$$

所求素数30个:

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73,79, 83, 89, 97, 101, 103, 107, 109, 113

欧拉函数

$\phi(n)$：小于 n 的且与 n 互素的数的个数

设 $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_k^{\alpha_k}$ 为 n 的素因子分解式

A_i={ x | $1 \le x < n$，且 p_i 整除 x }，

$|A_i| = n/p_i$， $i = 1, 2, \ldots, k$

$|A_i \cap A_j| = n/p_i p_j$， $1 \le i < j \le n$

…

$$\phi(n) = |\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \ldots \cap \overline{A_k}|$$

$$= n - \left(\frac{n}{p_1} + \frac{n}{p_2} + \ldots + \frac{n}{p_k}\right) + \left(\frac{n}{p_1 p_2} + \frac{n}{p_1 p_3} + \ldots + \frac{n}{p_{k-1} p_k}\right) - \ldots + (-1)^k \frac{n}{p_1 p_2 \ldots p_k}$$

$$= n\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right)\ldots\left(1 - \frac{1}{p_k}\right)$$

错位排列计数

设S为{1, 2, …, n}的排列的集合，i不排在第 i 位的排列称为错位排列，错位排列数记作D_n

令P_i是 排列中i 在第 i 位的性质，i=1, 2, …, n.

$$N = n!, \qquad N_1 = (n-1)!, \qquad N_2 = (n-2)!$$

$$\cdots$$

$$N_k = (n-k)!, \qquad \cdots, \qquad N_n = 0!$$

$$D_n = n! - \binom{n}{1}(n-1)! + \binom{n}{2}(n-2)! - \ldots + (-1)^n \binom{n}{n} 0!$$

$$= n![1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \ldots + (-1)^n \frac{1}{n!}]$$

$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ 代表从 n 个元素中取 k 个的组合数

错位排列实例

例5　8 个字母 A, B, C, D, E, F, G, H 的全排列中，求使得 4 个元素不在原来位置的排列数.

解：4 个元素的错排数为

$$D_4 = 4!(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!})$$

$$= 24(1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{24}) = 12 - 4 + 1 = 9$$

$$N = C(8,4) \cdot 9 = 630$$

6.4 集合恒等式—集合算律

	$\cup$	$\cap$	$\oplus$
交换	$A\cup B=B\cup A$	$A\cap B=B\cap A$	$A\oplus B=B\oplus A$
结合	$(A\cup B)\cup C=$ $A\cup(B\cup C)$	$(A\cap B)\cap C=$ $A\cap(B\cap C)$	$(A\oplus B)\oplus C=$ $A\oplus(B\oplus C)$
幂等	$A\cup A=A$	$A\cap A=A$	

	$\cup$与$\cap$	$\cap$与$\oplus$
分配	$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$ $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$	$A\cap(B\oplus C)=(A\cap B)\oplus(A\cap C)$
吸收	$A\cup(A\cap B)=A$ $A\cap(A\cup B)=A$	

吸收律的前提：$\cup$、$\cap$可交换

集合算律（续）

	$-$	$\sim$
D.M 律	$A-(B\cup C)=(A-B)\cap(A-C)$ $A-(B\cap C)=(A-B)\cup(A-C)$	$\sim(B\cup C)=\sim B\cap\sim C$ $\sim(B\cap C)=\sim B\cup\sim C$
双重否定		$\sim\sim A=A$

	$\varnothing$	E
补元律	$A\cap\sim A=\varnothing$	$A\cup\sim A=E$
零律	$A\cap\varnothing=\varnothing$	$A\cup E=E$
同一律	$A\cup\varnothing=A$	$A\cap E=A$
否定	$\sim\varnothing=E$	$\sim E=\varnothing$

集合包含或相等的证明方法

- 证明 $X \subseteq Y$
  - 命题演算法
  - 包含传递法
  - 等价条件法
  - 反证法
  - 并交运算法
- 证明 $X=Y$
  - 命题演算法
  - 等式代入法
  - 反证法
  - 运算法

以上的 X, Y 代表集合公式

命题演算法证 $X \subseteq Y$

任取 x，

$x \in X \Rightarrow \ldots \Rightarrow x \in Y$

例6 证明$A \subseteq B \Leftrightarrow P(A) \subseteq P(B)$

证 任取x

$x \in P(A) \Rightarrow x \subseteq A \Rightarrow x \subseteq B \Rightarrow x \in P(B)$

任取x

$x \in A \Rightarrow \{x\} \subseteq A \Rightarrow \{x\} \in P(A) \Rightarrow \{x\} \in P(B)$

$\Rightarrow \{x\} \subseteq B \Rightarrow x \in B$

包含传递法证 $X \subseteq Y$

找到集合T 满足 $X \subseteq T$ 且 $T \subseteq Y$，从而有$X \subseteq Y$

例7 $A-B \subseteq A \cup B$

证 $A-B \subseteq A$

$A \subseteq A \cup B$

所以 $A-B \subseteq A \cup B$

利用包含的等价条件证 $X \subseteq Y$

$$A \subseteq B \Leftrightarrow A \cup B = B \Leftrightarrow A \cap B = A \Leftrightarrow A - B = \phi$$

例8 $A \subseteq C \wedge B \subseteq C \Rightarrow A \cup B \subseteq C$

证 $A \subseteq C \Rightarrow A \cup C = C$

$B \subseteq C \Rightarrow B \cup C = C$

$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) = A \cup C = C$

$(A \cup B) \cup C = C \Leftrightarrow A \cup B \subseteq C$

命题得证

反证法证 $X\subseteq Y$

欲证$X\subseteq Y$, 假设命题不成立，必存在 x 使得 $x\in X$ 且 $x\notin Y$. 然后推出矛盾.

例9 证明 $A\subseteq C \wedge B\subseteq C \Rightarrow A\cup B\subseteq C$

证 假设 $A\cup B \subseteq C$ 不成立,

则 $\exists x\ (x\in A\cup B \wedge x\notin C)$

因此 $x\in A$ 或 $x\in B$，且 $x\notin C$

若 $x\in A$, 则与 $A\subseteq C$ 矛盾;

若 $x\in B$, 则与 $B\subseteq C$ 矛盾.

命题演算法证明$X=Y$

任取 x，

$x \in X \Rightarrow \ldots \Rightarrow x \in Y$

$x \in Y \Rightarrow \ldots \Rightarrow x \in X$

或者

$x \in X \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow x \in Y$

例12 证明 $A \cup (A \cap B) = A$ （吸收律）

证 任取x,

$x \in A \cup (A \cap B) \Leftrightarrow x \in A \vee x \in A \cap B$

$\Leftrightarrow x \in A \vee (x \in A \wedge x \in B) \Leftrightarrow x \in A$

等式替换证明$X=Y$

不断进行代入化简，最终得到两边相等

例13 证明$A\cup(A\cap B)=A$ （吸收律）

证 (假设交换律、分配律、同一律、零律成立)

$A\cup(A\cap B)$

$=(A\cap E)\cup(A\cap B)$ 同一律

$=A\cap(E\cup B)$ 分配律

$=A\cap(B\cup E)$ 交换律

$=A\cap E$ 零律

$=A$ 同一律

反证法证明$X=Y$

假设 $X=Y$ 不成立，则存在 x 使得 $x\in X$且$x\notin Y$，或者存在 x 使得 $x\in Y$且$x\notin X$，然后推出矛盾.

例14 证明以下等价条件

$$\underset{(1)}{A\subseteq B} \Leftrightarrow \underset{(2)}{A\cup B=B} \Leftrightarrow \underset{(3)}{A\cap B=A} \Leftrightarrow \underset{(4)}{A-B=\varnothing}$$

证明顺序：

(1) ⇒(2), (2) ⇒(3), (3) ⇒(4), (4) ⇒(1)

证明

$(1) \Rightarrow (2)$ $A \subseteq B \Rightarrow A \cup B = B$

显然$B \subseteq A \cup B$，下面证明$A \cup B \subseteq B$.

任取x，

$$x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A \vee x \in B \Rightarrow x \in B \vee x \in B \Leftrightarrow x \in B$$

因此有$A \cup B \subseteq B$. 综合上述（2）得证.

$(2) \Rightarrow (3)$ $A \cup B = B \Rightarrow A \cap B = A$

$$A = A \cap (A \cup B) \Rightarrow A = A \cap B$$

（将$A \cup B$用B代入)

证明（续）

(3) ⇒(4) $A\cap B=A \Rightarrow A-B=\varnothing$

假设$A-B\neq\varnothing$, 即$\exists x\in A-B$，那么$x\in A$且$x\notin B$. 而

$$x\notin B \Rightarrow x\notin A\cap B.$$

从而与$A\cap B=A$矛盾.

(4) ⇒(1) $A-B=\varnothing \Rightarrow A\subseteq B$

假设$A\subseteq B$不成立，那么

$$\exists x\,(x\in A \wedge x\notin B) \Rightarrow x\in A-B \Rightarrow A-B\neq\varnothing$$

与条件(4)矛盾.

总结

- 命题逻辑和谓词逻辑
- 集合的概念
- 集合的运算
- 集合的计数
- 集合恒等式

作业

教材

习题六，

2，10，19，25，28，（46 选做）

补充题（2012考题）

证明： 对任意集合A,B,C, 有 $(A\cap B)\cup C=A\cap(B\cup C)$当且仅当$C\subseteq A$.