

第一章 集合

- 三次数学危机

- 集合是数学中最基本的概念。既然是最基本的概念，就不是很好定义，一般只是说明。要说明什么是集合，有多种描述方法：“所要讨论的一类对象的整体”；“具有同一性质单元的集体”等。当我们讨论某一类对象的时候，就把这一类对象的整体称为集合。而集合中的对象就成为该集合中的元素。
- Cantor是这样描述集合的：所谓集合，是指我们无意中或思想中将一些确定的，彼此完全不同的客体的总和考虑为一个整体。这些客体叫做该集合的元素。

- 1.2 集合的概念和集合之间的关系
- 1.3 集合的运算
- 1.4 基本的集合恒等式
- *1.5 集合列的极限

1.2 集合的概念和集合之间的关系

集合的概念
集合的表示
集合间的关系
幂集
集族

集合的概念

- 设 A 是一个集合， a 是集合 A 中的元素 (member)，将这一事实记为 $a \in A$ ，读作 a 属于 A ；若 a 不是集合 A 中的元素，则记为 $a \notin A$ ，读作 a 不属于 A 。
- 例如，一间教室里所有桌子的整体就作为一个桌子集合。每张桌子都属于这个集合，每把椅子就不属于这个集合。

集合的表示

集合用大写字母，集合元素用小写字母。如 $x \in A$ ， $y \notin A$ 。

- (1) 列举法(listing) ---- 列出集合中的全体元素，元素之间用逗号分开，用花括号 $\{\dots\}$ 括起来。例：设 A 是由 a,b,c,d 为元素的集合， B 是正偶数集合，则 $A=\{a,b,c,d\}$ ， $B=\{2,4,6,8,\dots\}$
- (2) 描述法(Abstraction) ---- 通过说明集合中元素所具有的共同的性质来定义一个集合。用谓词 $P(x)$ 表示 x 具有性质 P ， $\{x \mid P(x)\}$ 表示具有性质 P 的集合。例： $P(x):x$ 是英文字母， $Q(y):y$ 是十进制数字。则 $C=\{x \mid P(x)\}$ 和 $D=\{y \mid Q(y)\}$ 分别表示26个英文字母和10个十进制数字集合

注意：

- 1) 集合中的元素各不相同
- 2) 集合中的元素不规定顺序
- 3) 集合的两种表示方法有时是可以相互转化的

例： $B = \{x | x \in \mathbb{N} \text{ 且 } x \text{ 为非0偶数}\}$ ， 或 $\{x | x = 2(k+1) \text{ 且 } k \in \mathbb{N}\}$

几个常用的集合及其记号:

\mathbf{N} (自然数集合): $+$ $*$ 封闭,逆运算不封闭

\mathbf{Z} (整数集合): $+$ 及其逆运算, $*$ 封闭,但 $*$ 的逆运算不封闭

\mathbf{Q} (有理数集合): $+$, $*$,逆运算封闭,全序域,具有稠密性
空隙 (不连通)

\mathbf{R} (实数集合)

\mathbf{C} (复数集合)

集合之间的关系

- 子集、相等、真子集
- 空集、全集
- 幂集、**n**元集、有限集
- 集族

- **定义1.1** 给定集合 A 和 B ，如果 B 中每个元素都是 A 中的元素，则称 B 为 A 的子集 (subset)，记作 $B \subseteq A$ 或 $A \supseteq B$ ，读作“ B 包含于 A ”或“ A 包含 B ”。

$$A \subseteq B \Leftrightarrow (\forall x)(x \in A \rightarrow x \in B)$$

设 $A = \{a, b, c\}$, $B = \{a, b, c, d\}$, $C = \{a, b\}$ ，则 $A \subseteq B$, $C \subseteq A$, $C \subseteq B$

按子集的定义，对于任何集合 A 、 B 、 C ，

(1) $A \subseteq A$ (自反性)

(2) $(A \subseteq B) \wedge (B \subseteq C) \Rightarrow (A \subseteq C)$ (传递性)

“A是B的**子集(subset)**”，记作 $A \subseteq B$ 是指：

- (1) A中的所有元素都是B的元素。或者
- (2) 在A中找不到一个不属于B的元素。或者
- (3) 对 $\forall x \in A$ ，均有 $x \in B$ 。

“A**不是**B的子集”是指：

A中至少有一个元素不属于B。

($\exists x \in A$ ，但 $x \notin B$)

记作 $A \not\subseteq B$ 。

证明: $A \not\subseteq B \Leftrightarrow (\exists x)(x \in A \wedge x \notin B)$

证明: $A \not\subseteq B \Leftrightarrow \neg (A \subseteq B)$

$\Leftrightarrow \neg ((\forall x)(x \in A \rightarrow x \in B))$

$\Leftrightarrow (\exists x) \neg (\neg(x \in A) \vee (x \in B))$

$\Leftrightarrow (\exists x) (x \in A \wedge x \notin B)$

• **定义1.2** 两个 A 和 B ，若 A 包含 B 且 B 包含 A ，则称 **A 与 B 相等**，记作 $A = B$ 。集合 A 与 B 不相等，记作 $A \neq B$ 。

$$A=B \Leftrightarrow (\forall x)(x \in A \leftrightarrow x \in B)$$

$$\Leftrightarrow (A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A)$$

例：设 $A = \{2\}$, $B = \{1, 4\}$, $C = \{x | x^2 - 5x + 4 = 0\}$, $D = \{x | x \text{ 为偶素数}\}$

则 $A = D$, $B = C$

• **定义1.3** 给定集合 A 和 B ，如果 $A \subseteq B$ 且 $A \neq B$ ，则称 A 为 B 的**真子集**，记作 $A \subset B$ 。

$$A \subset B \Leftrightarrow (\forall x)(x \in A \rightarrow x \in B) \wedge (\exists x)(x \in B \wedge x \notin A)$$

设三个集合 A ， B ， C ，从定义可以得到下面3个命题为真：

- (1) $A \not\subset A$ ；
- (2) 若 $A \subset B$ ，则 $B \not\subset A$ ；
- (3) 若 $A \subset B$ 且 $B \subset C$ ，则 $A \subset C$

- **空集**

定义1.4 不含任何元素的集合叫**空集**，记作 Φ 。

例如， $\Phi = \{x | P(x) \wedge \neg P(x)\}$ ， $P(x)$ 是任意谓词。

$A = \{x | x \in \mathbb{R} \wedge x^2 + 1 = 0\}$ 是空集，式中 \mathbb{R} 表示实数集合。

- **全集**

定义1.5 在研究某一问题时，如果限定所讨论的集合都是某一集合的子集，则称该集合为**全集**，记作 E 。即

$$E = \{x | P(x) \vee \neg P(x)\}。 \quad (P(x) \text{ 是任意谓词})$$

显然，全集的概念相当于论域，它是一个相对概念。

例如，如果讨论 (a, b) 上的实数，就取 (a, b) 为全集。也可以取 $[a, b)$ ， $(a, b]$ ，实数集 \mathbb{R} 等为全集。

■ **定理1.1** 空集是任意集合的子集。

证明：

■ **推论** 空集是唯一的。

证明：反证法

■ 定理1.1 空集是任意集合的子集。

证明：任给集合 A ， Φ 是空集。则 $(\forall x)(x \in \Phi \rightarrow x \in A)$ 永真，这是因为条件式的前件 $(x \in \Phi)$ 永假，所以该条件式对一切 x 皆为真。按子集的定义， $\Phi \subseteq A$ 为真。 #

■ 推论 空集是唯一的。

证明：证：假定 Φ_1 和 Φ_2 为二空集。

由定理2， $\Phi_1 \subseteq \Phi_2$ ， $\Phi_2 \subseteq \Phi_1$ 。

再根据定理1， $\Phi_1 = \Phi_2$ 。 #

- 定义1.6 集合 A 的所有子集构成的集合叫 A 的幂集 (power set)，记作 $P(A)$ 。用描述法表示为： $P(A)=\{x \mid x \subseteq A\}$ 。

- 性质

- (1) $x \in P(A)$ 当且仅当 $x \subseteq A$ 。
- (2) 设 A, B 是两个集合, $A \subseteq B$ 当且仅当 $P(A) \subseteq P(B)$ 。

含有n个元素的集合为n元集($n \geq 1$)

例, 设 $A = \{a, b, c\}$, 则

0元子集: Φ ;

1元子集: $\{a\}, \{b\}, \{c\}$;

2元子集: $\{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}$

3元子集: $\{a, b, c\}$

$$P(A) = \{\Phi, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$$

定理1.2 设A有 n 个元素，则 $P(A)$ 有 2^n 个元素。

证明：A的所有由 k 个元素组成的子集个数为从 n 个元素中取 k 个元素的组合数：

$$C_n^k = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{k!} \quad (x+y)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k \cdot x^k \cdot y^{n-k}$$

另外，因 $\Phi \subseteq A$ ，故 $P(A)$ 中元素的个数 N 可表示为：

$$N = C_n^0 + C_n^1 + \dots + C_n^k + \dots + C_n^n = \sum_{k=0}^n C_n^k$$

在 $(x+y)^n$ 的展开式中令 $x=y=1$ 得：

$$2^n = \sum_{k=0}^n C_n^k = N$$

#

集族： 由集合构成的集合

- **定义1.7** 设 A 为一个集族， S 为一个集合，若对于任意的 $\alpha \in S$ ，存在唯一的 $A_\alpha \in A$ 与之对应，而且 A 中的任何集合都对应 S 中的某一个元素，则称 A 是以 S 为指标集的**集族**， S 称为 A 的**指标集**。

\emptyset 为**空集族**

定义： 设 \mathbf{A} 是一个集合。若 \mathbf{A} 的元素都是集合，则称 \mathbf{A} 为**集合族**。若集合族 \mathbf{A} 可表示为 $\mathbf{A}=\{S_d | d \in D\}$ ，则称 D 为集合族 \mathbf{A} 的**指标集**。

• 例如

[1] 设 $A_1 = \{x \mid x \in \mathbb{N} \wedge x \text{ 为奇数}\}$, $A_2 = \{x \mid x \in \mathbb{N} \wedge x \text{ 为偶数}\}$, 则 $\{A_1, A_2\}$ 是以 $\{1, 2\}$ 为指标集的集族

[2] $\mathcal{P}(A)$ 是一个集合族, 设 A_1, A_2, A_3, \dots 是集合的序列, 且两两之间互不相同, 则集合 $\{A_1, A_2, A_3, \dots\}$ 是一个集合族, 可表示为 $\{A_i \mid i \in \mathbb{Z}\}$, 其中 \mathbb{Z} 为自然数集合, 是指标集。

[3] 设 p 是一个素数, $A_k = \{x \mid x = k \pmod{p}\}$, $k = 0, 1, \dots, p-1$, 则 $\{A_0, A_1, \dots, A_{p-1}\}$ 是以 $\{0, 1, 2, \dots, p-1\}$ 为指标集的集族

- **多重集合** 设全集为 E ， E 中元素可以不止一次在 A 中出现的集合 A ，称为**多重集合**。若 E 中元素 α 在 A 中出现 k ($k \geq 0$) 次，则称 α 在 A 中的重复度为 k 。
- **例：** 设全集 $E = \{a, b, c, d, e\}$ ， $A = \{a, a, b, b, c\}$ 为多重集合，其中 a, b 的重复度为2， c 的重复度为1，而 d, e 的重复度均为0。

集合可看作是各元素重复度均小于等于1的多重集合。

1.3 集合的运算

定义1.8 设 A 、 B 为两个集合，称由 A 与 B 的所有元素组成的集合为 A 与 B 的**并集(union)**，记作 $A \cup B$ ，称 \cup 为**并运算符**， $A \cup B$ 的描述法表示为 $A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$

设： $A = \{x \mid x \in \mathbb{N} \wedge 5 \leq x \leq 10\}$ ， $B = \{x \mid x \in \mathbb{N} \wedge x \leq 10 \wedge x \text{ 为素数}\}$ ，

则 $A \cup B = \{2, 3, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

集合的并运算可以推广到有限个或可数个集合

对于可数个集合 A_1, A_2, \dots ,

记 $A_1 \cup A_2 \cup \dots = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ 为并集

设 $A_n = \{x \mid x \in \mathbb{R} \wedge n-1 \leq x \leq n\}$, $n=1, 2, \dots, 10$, 则

$$\bigcup_{i=1}^{10} A_n = \{x \mid x \in \mathbb{R} \wedge 0 \leq x \leq 10\} = [0, 10]$$

定义1.9 设 A 、 B 为两个集合，称由 A 与 B 的公共元素组成的集合为 A 与 B 的**交集 (intersection)**，记作 $A \cap B$ ，称 \cap 为**交运算符**， $A \cap B$ 的描述法表示为 $A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$

设： $A = \{x \mid x \in \mathbf{N} \wedge 5 \leq x \leq 10\}$ ， $B = \{x \mid x \in \mathbf{N} \wedge x \leq 10 \wedge x \text{ 为素数}\}$ ，

则 $A \cap B = \{5, 7\}$

集合的交运算可以推广到有限个或可数个集合

设 $A_n = \{x \mid x \in \mathbf{R} \wedge 0 \leq x \leq n\}$ ， $n = 1, 2, \dots$ ， 则

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_n = \{x \mid x \in \mathbf{R} \wedge 0 \leq x \leq 1\} = [0, 1]$$

定义1.10 设 A 、 B 为两个集合，若 $A \cap B = \emptyset$ ，则称 A, B 是不交的(disjoint)，设 A_1, A_2, \dots 是可数个集合，若对于任意的 $i \neq j$ ，均有 $A_i \cap A_j = \emptyset$ ，则称 A_1, A_2, \dots 是不相交的

设 $A_n = \{x \mid x \in \mathbb{R} \wedge n-1 < x < n\}$, $n=1, 2, \dots$ ，则 A_1, A_2, \dots 是互不相交的

定义1.11 设 A 、 B 为两个集合，称属于 A 而不属于 B 的全体元素组成的集合为 B 对 A 的**相对补集(difference)**，记作 $A - B$ ，称 $-$ 为**相对补运算符**， $A - B$ 的描述法表示为

$$A - B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$$

定义1.13 设 E 为全集， $A \subseteq E$ ，称 A 对 E 的相对补集为 A 的**绝对补集(complement)**，并将 $E - A$ 简记为 $\sim A$ ，称 \sim 为**绝对补运算符**， $\sim A$ 的描述表示为 $\sim A = \{x \mid x \in E \wedge x \notin A\}$

定义1.12 设 A 、 B 为两个集合，称属于 A 而不属于 B ，或属于 B 而不属于 A 的全体元素组成的集合为 A 与 B 的**对称差**，记作 $A \oplus B$ ，称 \oplus 为对称差运算符， $A \oplus B$ 的描述法表示为 $A \oplus B = \{x \mid (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \notin A \wedge x \in B)\}$

$$A \oplus B = (A - B) \cup (B - A) = (A \cup B) - (A \cap B)$$

设： $A = \{x \mid x \in \mathbf{R} \wedge 0 \leq x < 2\}$ ， $B = \{x \mid x \in \mathbf{R} \wedge 1 \leq x < 3\}$ ， 则

$$A - B = \{x \mid x \in \mathbf{R} \wedge 0 \leq x < 1\} = [0, 1)$$

$$B - A = \{x \mid x \in \mathbf{R} \wedge 2 \leq x < 3\} = [2, 3)$$

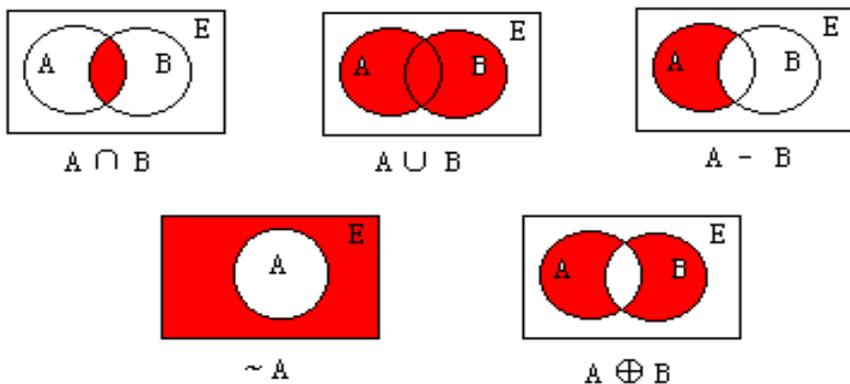
$$A \oplus B = [0, 1) \cup [2, 3)$$

将 \mathbf{R} 作为全集， 则

$$\sim A = (-\infty, 0) \cup [2, +\infty)$$

文氏图：用矩形代表全集，用圆或其他闭合曲线的内部代表E的子集，并将运算结果得到的集合用阴影部分表示。

用文氏图可将集合表示如下：



$$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$$

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$$

$$A - B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$$

$$A \oplus B = (A - B) \cup (B - A)$$

$$\sim A = \{x \mid x \in E \wedge x \notin A\}$$

注意：文氏图只是对某些集合之间的关系及运算结果给出一种直观而形象的示意性的表示，而不能用来证明集合等式及包含关系。

例1 设 $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, 4\}$, $C = \{3\}$ 。求 $A \cup B$, $B \cup A$, $A \cap B$, $B \cap A$, $A - B$, $A \oplus B$, $C \cap A$, $B \cap C$ 。

解:

例2 设 $E = \{a, b, c, d\}$, $A = \{a, c\}$, $B = \{a, b, c, d\}$, $c = \Phi$, 求 $\sim A$, $\sim B$, $\sim C$ 。

解:

例1 设 $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, 4\}$, $C = \{3\}$ 。求 $A \cup B$, $B \cup A$, $A \cap B$, $B \cap A$, $A - B$, $A \oplus B$, $C \cap A$, $B \cap C$ 。

解: $A \cup B = \{1, 2, 3, 4\} = B \cup A$

$$A \cap B = \{1\} = B \cap A$$

$$A - B = \{2, 3\} \quad A \oplus B = \{2, 3, 4\}$$

$$C \cap A = \{3\}, \quad B \cap C = \Phi$$

例2 设 $E = \{a, b, c, d\}$, $A = \{a, c\}$, $B = \{a, b, c, d\}$, $C = \Phi$, 求 $\sim A$, $\sim B$, $\sim C$ 。

解: $\sim A = \{b, d\}$, $\sim B = \Phi$, $\sim C = \{a, b, c, d\} = E$ 。

定义1.14 设 \mathcal{A} 为一个集族，称由 \mathcal{A} 中全体元素的元素组成的集合为 \mathcal{A} 的**广义并集**，记作 $\bigcup \mathcal{A}$ ，称 \bigcup 为**广义并运算符**，读作“**大并**” (**Big U**)， $\bigcup \mathcal{A}$ 的描述法表示为

$$\bigcup \mathcal{A} = \{x \mid \exists z(z \in \mathcal{A} \wedge x \in z)\}$$

例：设 $A = \{\{a,b\}, \{c,d\}, \{d,e,f\}\}$ ，则 $\bigcup A = \{a,b,c,d,e,f\}$

定义1.15 设 \mathcal{A} 为非空的集族，称由 \mathcal{A} 中全体元素的公共元素组成的集合为 \mathcal{A} 的**广义交集**，记作 $\bigcap \mathcal{A}$ ，称 \bigcap 为**广义交运算符**，读作“**大交**” (**Big Arch**)， $\bigcap \mathcal{A}$ 的描述法表示为

$$\bigcap \mathcal{A} = \{x \mid \forall z(z \in \mathcal{A} \rightarrow x \in z)\}$$

例：设 $A = \{\{1,2,3\}, \{1,a,b\}, \{1,6,7\}\}$ ，则 $\bigcap A = \{1\}$

广义并、广义交 举例

- 设 $\mathcal{A}_1 = \{a, b, \{c, d\}\}$, $\mathcal{A}_2 = \{\{a, b\}\}$, $\mathcal{A}_3 = \{a\}$,
 $\mathcal{A}_4 = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$, $\mathcal{A}_5 = a (a \neq \emptyset)$, $\mathcal{A}_6 = \emptyset$, 则

广义并、广义交 举例

- 设 $\mathcal{A}_1 = \{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \{\mathbf{c}, \mathbf{d}\}\}$, $\mathcal{A}_2 = \{\{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}\}$, $\mathcal{A}_3 = \{\mathbf{a}\}$,
 $\mathcal{A}_4 = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$, $\mathcal{A}_5 = \mathbf{a} (\mathbf{a} \neq \emptyset)$, $\mathcal{A}_6 = \emptyset$, 则
 $\cup \mathcal{A}_1 = \mathbf{a} \cup \mathbf{b} \cup \{\mathbf{c}, \mathbf{d}\}$, $\cap \mathcal{A}_1 = \mathbf{a} \cap \mathbf{b} \cap \{\mathbf{c}, \mathbf{d}\}$,
 $\cup \mathcal{A}_2 = \{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}$, $\cap \mathcal{A}_2 = \{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}$,
 $\cup \mathcal{A}_3 = \mathbf{a}$, $\cap \mathcal{A}_3 = \mathbf{a}$
 $\cup \mathcal{A}_4 = \emptyset \cup \{\emptyset\} = \{\emptyset\}$, $\cap \mathcal{A}_4 = \emptyset \cap \{\emptyset\} = \emptyset$,
 $\cup \mathcal{A}_5 = \cup \mathbf{a}$, $\cap \mathcal{A}_5 = \cap \mathbf{a}$
 $\cup \mathcal{A}_6 = \emptyset$, $\cap \mathcal{A}_6 = \mathbf{E}$ (或者无定义)

运算的优先级

- 第一类运算：绝对补，求幂集，广义并，广义交
 - 按由右到左的顺序进行
- 第二类运算：并，交，相对补，对称差
 - 往往由括号决定，按左向右的顺序进行

有穷集合的计算—包含排斥原理 (Inclusion-Exclusion Principle)

- 设 A_1, A_2, \dots, A_n 为 n 个集合, 则

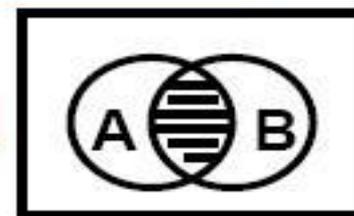
$$\begin{aligned} \left| \bigcup_{i=1}^n A_i \right| = & \sum_{i=1}^n |A_i| - \sum_{i<j} |A_i \cap A_j| + \sum_{i<j<k} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \dots \\ & + (-1)^{n+1} |A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n| \end{aligned}$$

此定理称为包含排斥原理, 简称容斥定理

容斥原理(证明)

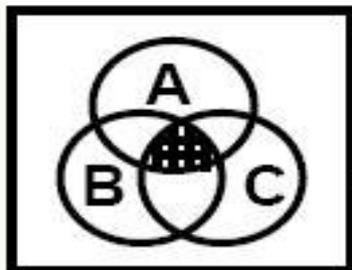
- $n=2$ 时的情况:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$



- 归纳证明: 以 $n=3$ 为例:

$$\begin{aligned} |A \cup B \cup C| &= |(A \cup B) \cup C| = |A \cup B| + |C| - |(A \cup B) \cap C| \\ &= |A| + |B| - |A \cap B| + |C| - |(A \cap C) \cup (B \cap C)| \\ &= |A| + |B| - |A \cap B| + |C| \\ &\quad - (|A \cap C| + |B \cap C| - |(A \cap C) \cap (B \cap C)|) \\ &= |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| \\ &\quad + |A \cap B \cap C| \end{aligned}$$



T

容斥定理的应用

[例1.1] 在1到10000之间既不是某个整数的平方，也不是某个整数的立方的数有多少个？

解: 设 $E = \{x \in \mathbf{N} \mid 1 \leq x \leq 10000\}$, $|E| = 10000$

$A = \{x \in E \mid x = k^2 \wedge k \in \mathbf{Z}\}$, $|A| = 100$

$B = \{x \in E \mid x = k^3 \wedge k \in \mathbf{Z}\}$, $|B| = 21$

则 $|\sim(A \cup B)| = |E| - |A \cup B|$

$= |E| - (|A| + |B| - |A \cap B|)$

$= 10000 - 100 - 21 + 4 = 9883$

注意 $A \cap B = \{x \in E \mid x = k^6 \wedge k \in \mathbf{Z}\}$, $|A \cap B| = 4$. #

[例1.2] 对24名科技人员进行掌握外语情况的调查，统计资料如下：会说英、日、德、法语的人数分别为13，5，10，9。其中同时会说英语、日语的人数为2，同时会说英语、德语、或同时会说英语、法语，或同时会说德语、法语两种语言的人数均为4，会说日语的人既不会说法语也不会德语，试求只会说一种语言的人数各为多少？又同时会说英、德、法语的人数为多少？

解：设 $E = \{x \mid x \text{ 是 } 24 \text{ 名科技人员之一}\}$ ， $|E| = 24$

$A = \{x \in E \mid x \text{ 会说英语}\}$ ， $B = \{x \in E \mid x \text{ 会说日语}\}$ ，

$C = \{x \in E \mid x \text{ 会说德语}\}$ $D = \{x \in E \mid x \text{ 会说法语}\}$ ，

已知:

$$|A \cup B \cup C \cup D| = 24, \quad |A|=13, |B|=5, |C|=10, |D|=9, \\ |A \cap B| = 2, |A \cap C| = |A \cap D| = |C \cap D| = 4,$$

$$|B \cap C| = |B \cap D| = |A \cap B \cap C| = |A \cap B \cap D| = |B \cap C \cap D|$$

$$= |A \cap B \cap C \cap D| = 0, \quad |A \cup B \cup C \cup D| = 24$$

$$|A \cup B \cup C \cup D|$$

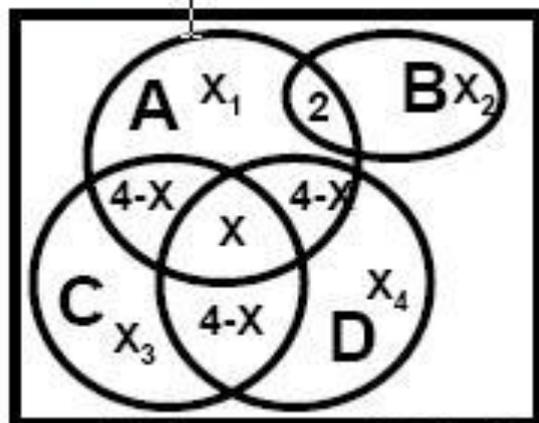
$$= |A| + |B| + |C| + |D| - |A \cap B| - |A \cap C| - |A \cap D| - |B \cap C| - |B \cap D| \\ - |C \cap D| + |A \cap B \cap C| + |A \cap B \cap D| + |B \cap C \cap D| + |A \cap C \cap D| \\ - |A \cap B \cap C \cap D|$$

把已知代入上面公式可得: $|A \cap C \cap D| = 1$

设只会说英日德法语的人数分别为 x_1, x_2, x_3, x_4 , 则

$$x_1 = |A| - |(B \cup C \cup D) \cap A| = |A| - |(B \cap A) \cup (C \cap A) \cup (D \cap A)| \\ = 4, \quad x_2 = 3, \quad x_3 = 3, \quad x_4 = 2 \quad \#$$

- 解(续): 设所求人数分别为 x_1, x_2, x_3, x_4, x (如图),



$$A = \{x \in E \mid x \text{ 会说英语}\}, |A| = 13$$

$$B = \{x \in E \mid x \text{ 会说日语}\}, |B| = 5$$

$$C = \{x \in E \mid x \text{ 会说德语}\}, |C| = 10$$

$$D = \{x \in E \mid x \text{ 会说法语}\}, |D| = 9$$

首先, $x_2 = |B| - |A \cap B| = 5 - 2 = 3$,

其次, 对 A, C, D 用容斥原理, 注意 $|E| = 24$:

$$24 - 3 = 21 = 13 + 10 + 9 - 4 - 4 - 4 + x = 20 + x, \text{ 得 } x = 1,$$

最后, $x_1 = |A| - |A \cap B| - 3 - 3 - 1 = 13 - 2 - 7 = 4$, 同理

$$x_3 = 10 - 3 - 3 - 1 = 3, \quad x_4 = 9 - 3 - 3 - 1 = 2. \quad \#$$

小结

- $\in \neq \mathbf{E} \subseteq \subset = \mathbf{P}()$

- $\cap \cup - \oplus \sim$

作业

- P20: 3, 6, 8, 10

P21: 13, 16